

PRÁCTICAS ASOCIADAS A LA EVALUACIÓN FINAL

Las evaluaciones finales tienen diversas estrategias de presentación, pero siempre son de tipo integrador, se basan en los temas desarrollados en clases, y en el material que se puede descargar del sitio de “Métodos Numéricos y Programación” en aula abierta de Facultad de Ingeniería. Particularmente de la pestaña “Materiales de Cátedra”

- Guías de estudio: CNyC_2016_Guia_de_Estudio_UNC_2016-con_indice.pdf
- Material para clases de Teoría: CNyC_2016_Material_para_Clases_Teoria-con-indice.pdf
- Métodos Iterativos-Convergencia-2021:

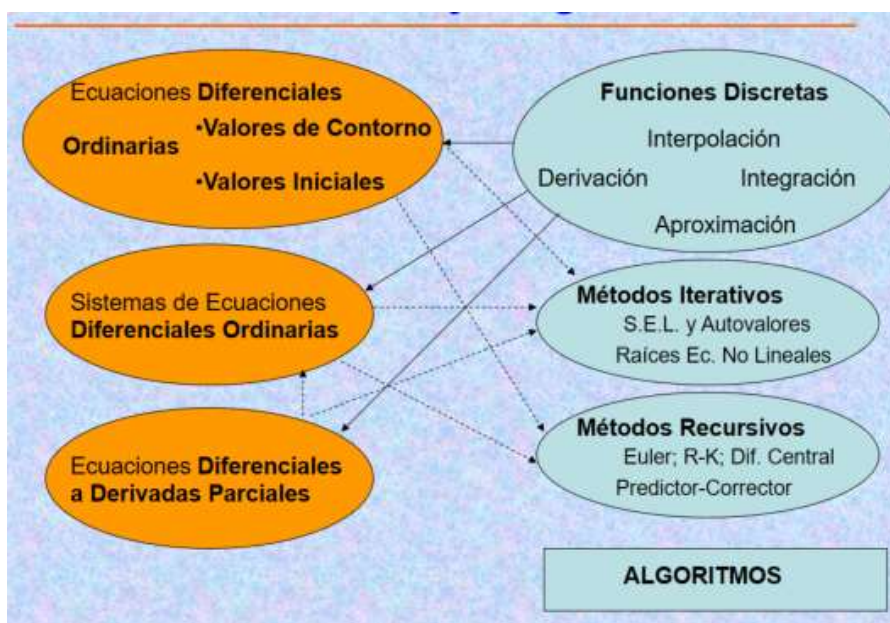
y de la pestaña “Proyectos Integradores UNCUYO” donde hay cinco proyectos integradores que son problemas simples de ingeniería que se resuelven con métodos numéricos. Están suficientemente documentados con planteos por etapas con resultados posibles de verificar.

Los “Proyectos Integradores UNCUYO” son base de muchas evaluaciones finales, y reproducir los resultados de los mismos conjuntamente con la comprensión de las distintas estrategias numéricas y de programación asegura una base de conocimiento y habilidades suficientes para alcanzar los objetivos de la asignatura.

En Ciencias de las Ingenierías los distintos problemas se presentan mediante formulaciones diferenciales expresados por Ecuaciones Diferenciales (Ordinarias con Valores de Contorno o Iniciales, y a Derivadas Parciales); y los distintos métodos numéricos se utilizan para obtener soluciones aproximadas de precisión creciente.

Se asume siempre en la asignatura “Métodos Numéricos y Programación” que el problema a resolver tiene un modelo matemático dato, expresado mediante formulaciones diferenciales, y que debe resolverse con métodos numéricos. Como se obtiene el modelo matemático dato es objeto de otras asignaturas en las distintas carreras.

En el documento “MNyP Introducción.pdf” que está en la pestaña Información general del sitio de “Métodos Numéricos y Programación” en aula abierta, se presenta el siguiente mapa conceptual que busca destacar la vinculación necesaria de los distintos temas de la asignatura



Los ejercicios prácticos de los finales son situaciones problemas que para ser resueltos requieren una integración de conceptos, estrategias y métodos. En todos los casos habrá que hacer un programa en OCTAVE y algún desarrollo en papel.

Los ejercicios prácticos de los finales pueden requerir alguno de los siguientes tipos de ejercicios, que deberían estudiarse según el orden cronológico que fueron dictados/tratados en el cursado de la asignatura, ya que de esa manera se practica con dificultad creciente.

Discretización. Transforma un modelo matemático en ecuaciones diferenciales (ordinarias o parciales) en un modelo para ser resuelto con métodos numéricos.

Esto es básicamente lo que se trata en Guías de estudio en el punto *Guía de Estudio para Ecuaciones Diferenciales con Valores de Contorno*, entre las páginas 80 y 89. Primeros son ejercicios que parten de Modelos matemáticos definidos por Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) con valores de contorno y mediante aplicación de derivada numérica se transforman en sistemas de ecuaciones lineales a ser resueltos por Jacobi, o por Método de la potencia según se trate.

Luego se toman Ecuaciones Diferenciales a Derivadas Parciales (EDP) y en la variable independiente asociada al problema de valores de contorno, mediante aplicación de derivada numérica se transforman en sistemas de EDO a ser resueltos por Diferencia Central, Euler o Runge Kutta según se trate.

Esto también se lo desarrolla en Material para clases de Teoría entre las páginas 103 y 116.

Métodos Numéricos. Son los distintos algoritmos para resolver modelos numéricos expresados por ecuaciones no lineales, sistemas de ecuaciones lineales o sistemas de EDO con valores iniciales. Todos estos métodos se deben poder programar en OCTAVE.

Los métodos numéricos para ecuaciones no lineales se tratan en Guías de estudio en el punto *Guía de Estudio para Raíces de Ecuaciones No Lineales*, entre las páginas 13 y 30.

Los métodos numéricos para ecuaciones lineales se tratan en Guías de estudio en el punto *Guía de Estudio para Sistemas de Ecuaciones Lineales*, entre las páginas 32 y 39. Aquí el método de Jacobi es fundamental.

Los métodos numéricos para ecuaciones lineales de tipo Autovalores y Autovectores se tratan en Guías de estudio en el punto *Guía de Estudio Autovalores y Autovectores*, entre las páginas 40 y 42, para el algoritmo de la Potencia y Potencia Inversa. Y entre las páginas 42 a 45 se incluyen ejercicios de discretización de ecuaciones diferenciales que mediante aplicación de derivada numérica se transforman en sistemas de ecuaciones lineales a ser resueltos por Método de la potencia.

Los métodos numéricos para sistemas de EDO con valores iniciales se tratan en dos partes según sean Edo de Primer orden o de Segundo Orden.

Las EDO de Valores iniciales de Primer Orden se tratan en Guías de estudio en el punto *Guía de Estudio para Ecuaciones Diferenciales con Valores Iniciales*, entre las páginas 90 y 103.

Las EDO de Valores iniciales de Segundo Orden se tratan en Guías de estudio en el punto *Guía de Estudio para Ecuaciones Diferenciales con Valores Iniciales*, entre las páginas 104 y 109. En las páginas 112 y 113 hay ejercicios de discretización asociados a este tema.

Métodos para Derivar, Integrar funciones discretas. Son los distintos algoritmos para derivar funciones discretas y los necesarios para integrar funciones discretas. Los métodos de trapecios y Simpson son fundamentales. Las reglas de derivación con orden de error 2 son fundamentales. Se debe poder programar en OCTAVE estos métodos para trabajar con funciones discretas que podrían tener cientos de componentes.

Los métodos numéricos para Integración numérica en Guías de estudio en el punto *Guía de Estudio para Integración Numérica*, entre las páginas 60 y 72.

Los métodos numéricos para derivación numérica en Guías de estudio en el punto *Guía de Estudio para Derivación Numérica*, entre las páginas 73 y 80.

Métodos para Interpoliar y Aproximar funciones discretas. Son los distintos algoritmos interpolar funciones discretas (Lagrange, Newton) y el método de Mínimos Cuadrados para aproximar funciones discretas. Las interpolaciones deben poder hacerse en papel, y el método de Mínimos Cuadrados debe poder programar en OCTAVE.

En la Guías de estudio entre las páginas 45 y 53 hay ejemplos de Interpolación

En la Guías de estudio entre las páginas 54 y 59 hay ejemplos de Mínimos Cuadrados

En la Guías de estudio en la página 86 hay un ejemplo de Mínimos Cuadrados para una función exponencial que mediante logaritmos se transforma en lineales

Algoritmos Simples. Se trata de algoritmos simples que se deben resolver usando las estructuras básicas de algoritmia (repetir o for; decisión o condicional o if; mientras o while) sin hacer uso de comandos especiales de OCTAVE (como find, norm, ect).

En la Guías de estudio entre las páginas 1 y 12 hay ejemplos de complejidad creciente.

Otro ejemplo: Considerar una función discreta en forma de dos vectores de igual dimensión. Un vector con los valores de las abscisas y otro vector con los valores de las ordenadas. Entonces:

Calcular la norma cuadrática de las ordenadas

Buscar el máximo valor de los valores absolutos de las ordenadas, y el correspondiente valor de abscisa (se corresponde con la norma infinita)

Buscar el máximo valor positivo de las ordenadas, y el correspondiente valor de abscisa

Buscar el mínimo valor negativo de las ordenadas, y el correspondiente valor de abscisa

Hacer las búsquedas anteriores sólo en un segmento dato de las abscisas

Otro ejemplo: Considerar dos funciones discretas dadas por los pares ordenados $(x_i; f_i)$ y $(x_i; g_i)$ con $i=1$ a dim. (las abscisas x_i son las mismas). Calcular el siguiente coeficiente

$$C = \frac{\{\sum_{i=1}^{dim}(f_i \cdot g_i)\}}{\{\sum_{i=1}^{dim}(f_i \cdot f_i)\}^{1/2} \{\sum_{i=1}^{dim}(g_i \cdot g_i)\}^{1/2}}$$

EJERCICIO INTEGRADOR 1: Usando Método de Jacobi**MODELO MATEMÁTICO**

Se busca resolver el siguiente modelo matemático expresado por la siguiente EDO

$-k_1 \frac{d^2(u(x))}{dx^2} + c u(x) = s(x) \quad \text{si} \quad x \in \Omega = \{x \in R: 0 \leq x \leq L\}$ con $u(a) = T_0$ $-k_L \frac{du}{dx} \Big _{x=L} = f_L$	(1)
---	-----

siendo $k_1, k_L, c, s(x), f_L, a$ y L datos.

Es de interés la siguiente integral

$E = \int_0^L \left\{ k_1 \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 + c (u(x))^2 \right\} dx$	(2)
---	-----

que representa una *medida global* del problema.

MODELO NUMÉRICO

Se plantea una solución aproximada con una función discreta definida por **8 intervalos equidistantes** en el intervalo de $[0; L]$, y usando derivada numérica central, OBTENER el siguiente modelo numérico,

$K \vec{u} = \vec{p}$	(3)
-----------------------	-----

Para $k_1 = k_L = c = 1$, $s(x) = 5$, $f_L = 0$, $T_0 = 50$, $a = 1$ y $L = 9$

resultan $K =$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 2 & -1.5 \end{bmatrix} \quad \vec{p} = \begin{Bmatrix} 50 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ELABORAR en OCTAVE un programa que permita

a) **RESOLVER** el sistema (3) usando la siguiente alternativa del método iterativo JACOBI

Dada una “aproximación cualquiera” $\vec{u}_k$

Se evalúa el vector residuo en la forma

$$\vec{r}_k = -K \vec{u}_k + \vec{p}$$

Se evalúa una nueva aproximación $\vec{u}_{k+1}$ en la forma

$$\vec{u}_{k+1} = \vec{u}_k + H \vec{r}_k$$

Siendo H una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son los elementos recíprocos de la diagonal principal de la matriz K . [$H(i, i) = 1/K(i, i)$ con i de 1 a la dimensión de K].

Como **criterio de detención** considerar que: **la norma infinito del vector residuo $\|\vec{r}_k\|_\infty$ sea menor a 10^{-3} , o bien que no superen 500 iteraciones.**

Se **actualiza** la “aproximación cualquiera” como la última aproximación obtenida

ENCONTRAR y ENTREGAR los valores de

$$u(0) = \quad u(L/2) = \quad u(L) =$$

- b) **OBTENER** el valor de la Integral (2) usando el método de integración numérica más preciso posible para este caso. $E =$
- c) **OBTENER** una aproximación $um(x)$ de la función $u(x)$, solución de la EDO (1), a partir de la solución discreta $\vec{u}$, solución del sistema (3), usando el Método de Mínimos Cuadrados. Con

$$um(x) = A + B * \left(\frac{1}{x}\right) + C * \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

resultan $A =$ $B =$ $C =$

GRAFICAR la función $u(x)$ y $um(x)$ en el intervalo de x dado por $[0; L]$, en la misma figura distinguiendo ambas funciones (usar símbolos y/o colores distintos)

- d) **OBTENER** una aproximación $um(x)$ de la función $u(x)$, solución de la EDO (1), a partir de la solución discreta $\vec{u}$, solución del sistema (3), usando el Método de Mínimos Cuadrados. Con

$$um(x) = A + B * \left(\frac{1}{x}\right) + C * \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

resultan $A =$ $B =$ $C =$

- e) Una **medida global de CONVERGENCIA** de la solución aproximada obtenida, es posible evaluarla con $Ein(N)$ caso particular de la integral (2), que con $k_1 = 1$ y $c = 0$, resulta:

$$Ein = \int_0^L \left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 dx$$

Sabiendo que las soluciones de la integral Ein para los distintos N , son las siguientes

N	2	4	8	16
$Ein(N)$	552,96	786,35	981,61	1027,3

Obtener una aproximación de $Ein(N)$ usando el método de mínimos cuadrados para obtener los coeficientes A, B y C de:

$$Em(N) = A + B * \left(\frac{1}{N}\right) + C * \left(\frac{1}{N}\right)^2$$

Se define como el valor de convergencia de $Ein(N)$ a

$$E_{con} = \lim_{N \rightarrow \infty} Em(N)$$

Es posible evaluar el *ErrorGlobal* de la solución aproximada obtenida con $N=8$, mediante

$$ErrorGlobal = \frac{abs(Ein(N) - E_{con})}{E_{con}}$$

Elegir un valor (Tol_EG) para la tolerancia del *ErrorGlobal*, de modo que la solución obtenida con $N=8$ intervalos sea aceptable

$$Tol_EG =$$

EJERCICIO INTEGRADOR 2: Usando Método de la Potencia/Potencia Inversa**MODELO MATEMÁTICO**

El modelo matemático que describe las oscilaciones libres de “una membrana circular” expresado en EDO es

$-T \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) - \omega^2 m \varphi(r) = 0 \quad \text{si } r \in \{r \in R: 0 \leq r \leq L\}$	(1)
--	-----

con $\left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=0} = 0$; $\varphi(L) = 0$ y los siguientes datos $L=100$; $T=10000$ y $m=0.8$. La forma modal está dada por la función $y = \varphi(r)$, y la frecuencia natural es ω .

Una medida de la energía elástica es:

$EInt = \int_0^L \left\{ T \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 2\pi r \right\} dr$	(2)
---	-----

MODELO NUMÉRICO

Al plantear $y = \varphi(r)$ como una solución aproximada dada por una función discreta de **(N+1) puntos equidistantes** en el intervalo $[0; L]$ de la variable independiente “r”, dicho intervalo queda subdividido en **N segmentos iguales de longitud Δr** cada uno. Usando derivada numérica central con error de orden dos, **JUSTIFICAR** que se obtiene el siguiente modelo numérico,

$(K - \omega^2 M) \vec{z} = \vec{0}$	(3)
--------------------------------------	-----

La matriz K es tri-diagonal y cuadrada de orden (N-1) por (N-1); es decir con coeficientes todos nulos salvo las tres diagonales principales. Para **N=6 segmentos iguales de longitud Δr** resulta que

$$K = \frac{T}{\Delta r^2} \begin{bmatrix} +4/3 & -4/3 & 0 & 0 & 0 \\ -3/4 & +2 & -5/4 & 0 & 0 \\ 0 & -5/6 & +2 & -7/6 & 0 \\ 0 & 0 & -7/8 & +2 & -9/8 \\ 0 & 0 & 0 & -9/10 & +2 \end{bmatrix} \quad M = m I_5, \quad \text{siendo } I_5 \text{ la matriz identidad de orden 5}$$

SOLUCIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

PROGRAMAR en OCTAVE, el **Método de Potencia con Escalamiento** (Normalización del vector en cada iteración) y **usar como criterio de convergencia que**

$$abs(\rho_{k+1} - \rho_k) < \text{tolerancia} = 1E-3 \quad \text{siendo } \rho_{k+1} = \frac{\langle \vec{z}^{(k+1)}, \vec{x}^{(k)} \rangle}{\langle \vec{x}^{(k)}, \vec{x}^{(k)} \rangle}$$

Siendo el valor ρ_k una aproximación del mayor autovalor según el método de la Potencia en la iteración k-ésima. Donde el vector $\vec{x}^{(k)}$ tiene norma uno; y el vector $\vec{z}^{(k+1)}$ se origina con la fórmula de recurrencia del método de la potencia. Con $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ se indica producto escalar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

En cada iteración se pueda aproximar el valor propio

Los **autovectores se deben Normalizar** de modo que la norma infinito sea 1.

Se detenga el proceso iterativo cuando la diferencia entre las aproximaciones del valor propio entre dos iteraciones consecutivas sea menor que 10^{-5}

RESPONDER justificadamente las siguientes consignas (sólo válidas si se obtienen con el programa desarrollado). Los autovectores se deben Normalizar de modo que la norma infinito sea 1.

- a) El **MAYOR autovalor** y su autovector asociado son:

$$\omega^2 = \quad \quad \quad \vec{z}_M = \quad \quad \quad \text{que convergieron en: iteraciones}$$

- b) El **MENOR autovalor** y su autovector asociado son:

$$\omega^2 = \quad \quad \quad \vec{z}_m = \quad \quad \quad \text{que convergieron en: iteraciones}$$

- c) Cada autovalor tiene asociada una frecuencia natural ω y un periodo natural $T = 2\pi/\omega$. En base a los resultados obtenidos, el **MENOR PERIODO NATURAL** es:

- d) Para el MENOR PERIODO NATURAL, con su autovector normalizado con norma infinito 1, expresar la aproximación de la función

la forma modal dada por la función $y = \varphi(r)$, solución discreta aproximada de la EDO (1) asociada al MENOR PERIODO NATURAL de (3) es:

$\varphi(0)$	$\varphi(\Delta r)$	$\varphi(2\Delta r)$	$\varphi(3\Delta r)$	$\varphi(4\Delta r)$	$\varphi(5\Delta r)$	$\varphi(L)$

Analizando la función discreta anterior, es posible decir que la versión continua de la forma modal dada por la función $y = \varphi(r)$, solución de la EDO (1) asociada al MENOR PERIODO NATURAL de (3) al menos vale cero veces

Consecuentemente, usando el Método de Mínimos Cuadrados con una base polinómica, para buscar una aproximación continua de la forma modal dada por de la función $y = \varphi(r)$, solución de la EDO (1) asociada al MENOR PERIODO NATURAL de (3), los elementos de la base deben ser polinomios de al menos grado.....

- e) Para el MENOR PERIODO NATURAL, y la forma modal dada por la función $y = \varphi(r)$ definida en el inciso anterior, la siguiente integral (2), usando el método de Simpson Compuesto, resulta igual a:

$$EInt = \int_0^L \left\{ T \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)^2 2\pi r \right\} dr$$

La integración de Simpson Compuesta tiene orden de error proporcional a Δr elevado a la potencia.....y es exacta hasta polinomios de grado.....

La integración de Trapecios Compuesta tiene orden de error proporcional a Δr elevado a la potencia.....y es exacta hasta polinomios de grado.....

EJERCICIO INTEGRADOR 3: Usando Método de Runge Kutta de Segundo Orden

El modelo matemático expresado en EDP es

$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2(u(x,t))}{\partial x^2} \quad \text{si} \quad x \in \Omega = \{x_1 \in \mathbb{R}: 0 \leq x \leq L\}$	(1)
---	-----

con $u(x_1, t) = g(t)$ $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$ y $u(x, 0) = 0$ siendo k, x_1, L y $g(t)$ datos.

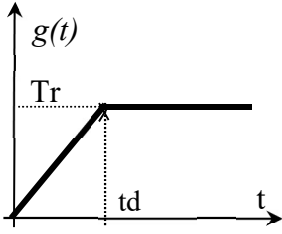
MODELO NUMÉRICO

Se plantea una solución aproximada con una función discreta de **6 puntos equidistantes** en el intervalo de $[x_1; L]$, y usando derivadas numéricas con orden de error 2, y de tipo central toda vez que sea posible, **JUSTIFICAR** que se obtiene el siguiente modelo numérico,

$\frac{d(\vec{z}(t))}{dt} = K \vec{z}(t) + \vec{p} \cdot g(t)$	(2)
--	-----

Para $x_1 = 10$; $L=80$; $k=2$, $td=750$, $Tr=300$

resultan $K = \frac{1}{50} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix}$ $\vec{p} = \frac{1}{50} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$



los valores iniciales están dados por: $\vec{z}_0 =$

ELABORAR en OCTAVE un programa que permita **RESPONDER justificadamente** las siguientes consignas (sólo válidas si se obtienen con el programa desarrollado).

- RESOLVER el sistema EDO usando el método de Runge Kutta de Segundo Orden**, con $Dt = 22,5$ y **GRAFICAR** la función $u(x_4, t)$ en el intervalo de t dado por $[0; 6 * td]$
- ENTREGAR** en $t_s = 3 * td$ los valores de

$x = x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$x = L$
$u(x_1, t)$	$u(x_2, t)$	$u(x_3, t)$	$u(x_4, t)$	$u(x_5, t)$	$u(x_6, t)$	$u(x_7, t)$	$u(L, t)$

- Obtener una aproximación de mínimos cuadrados**, de la función discreta $u(x_k, t_s)$ $k=1:8$, obtenida con el método de RK de segundo orden, en la forma

$$Um(x) = A + B * (1/x) + C * (1/x)^2$$

Los coeficientes que resultan son:

A=

B=

C=

- Evaluar el Cuadrado de la Norma Cuadrática del Residuo** entre la solución discreta obtenida con el método de Runge Kutta de Segundo Orden en $t=t_s$, y la solución aproximada obtenida con Mínimos Cuadrados evaluada en las abscisas x de la discretización usada en el modelo numérico. Esto es:

$$\|r\|^2 = \|u(x_k, t_s) - Um(x_k)\|^2 \quad \text{con } k=1:8$$

$$\|r\|^2 = \dots \dots \dots$$

EJERCICIO INTEGRADOR 4: Usando Método de Diferencia Central**MODELO MATEMÁTICO**

Se busca resolver el siguiente modelo matemático expresado por la siguiente EDO

$-EA \frac{\partial^2(u(x,t))}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2(u(x,t))}{\partial t^2} = 0 \quad \text{si} \quad x \in \Omega = \{x \in R: 0 \leq x \leq L\}$ con $u(0, t) = 10 g(t) \quad EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big _{x=L} = -M_L \frac{\partial^2(u(x,t))}{\partial t^2} \Big _{x=L}$	(1)
---	-----

siendo $EA, \rho A, M_L, g(t)$ y L datos.

Es de interés la siguiente integral

$E = \frac{EA}{2} \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^2 \right\} dx$	(2)
---	-----

que representa una *medida global* del problema.

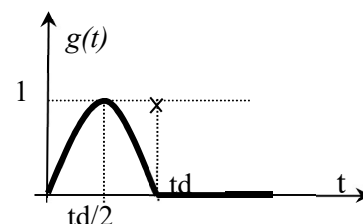
MODELO NUMÉRICO

Se plantea una solución aproximada con una función discreta definida por **5 intervalos equidistantes** en el intervalo de $[0; L]$, y usando derivadas numéricas con error de orden 2, y de tipo central toda vez que sea posible, **JUSTIFICAR** que se obtiene el siguiente modelo numérico:

$M \frac{d^2 \vec{u}(t)}{dt^2} + K \vec{u}(t) = g(t) \vec{b}$	(3)
---	-----

Donde $K = \frac{EA}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} \rho A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2 M_L}{\Delta x} \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \frac{EA}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

con los siguientes datos: $EA = 210000$; $L = 50000$; $\rho A = 8E - 9$; $M_L = 1.02E - 2$; y $g(t)$ es no nula si $t < t_d$; y es nula para $t > t_d$



OBTENER el polinomio de interpolación para $g(t)$ en el intervalo $[0; t_d]$, usando polinomios de Lagrange

ELABORAR en **OCTAVE** un programa que permita **RESPONDER** justificadamente las siguientes consignas (sólo válidas si se obtienen con el programa desarrollado).

- a) **RESOLVER** el sistema (3) usando el método de Diferencia Central con $\Delta t = 0.001$ en el rango de $t \in [0; 4]$, con $t_d=1$

ENTREGAR en $t_r=3$ los valores de

$u(0, t_r)$	$u(\Delta x, t_r)$	$u(2\Delta x, t_r)$	$u(3\Delta x, t_r)$	$u(4\Delta x, t_r)$	$u(L, t_r)$

- b) **CALCULAR** $v_L(t)$, derivada respecto del tiempo de $u_L(t)$, en el rango de $t \in [0; 4]$ siendo

$$v_L(t) = \frac{d(u_L(t))}{dt} \quad \text{con} \quad u_L(t) = u(L, t)$$

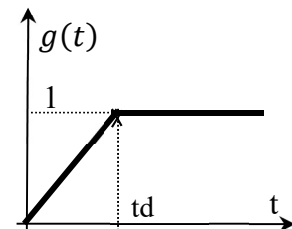
Usar derivadas numéricas con error de orden 2 y de tipo central toda vez que sea posible.
GRAFICAR $v_L(t)$ como función de $u_L(t)$.

- c) **CALCULAR**, la integral (2) en $t_r=3$ usando el método de integración más preciso posible para este caso

$$E = \frac{EA}{2} \int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right)^2 \right\} dx =$$

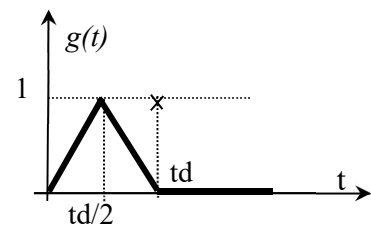
- d) Si $g(t)$ es la función de la figura adjunta con $t_d = 1$

Cambiar el programa en OCTAVE y obtener los resultados solicitados en los incisos a), b) y c) anteriores.



- e) Si $g(t)$ es la función de la figura adjunta con $t_d = 1$

Cambiar el programa en OCTAVE y obtener los resultados solicitados en los incisos a), b) y c) anteriores.



EJERCICIO INTEGRADOR 5: Usando Método de Runge Kutta de Segundo orden**MODELO MATEMÁTICO**

El modelo matemático de deformaciones de una membrana circular ante variaciones de presión, expresado en EDP es

$-T \left[\frac{\partial^2(u(r,t))}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(u(r,t))}{\partial r} \right] + m \cdot \frac{\partial^2(u(r,t))}{\partial t^2} = p \cdot \sin(\Omega t)$	(1)
--	-----

para cualquier $r \in \{r \in R: 0 \leq r \leq L\}$. Además, se debe cumplir que

para todo t $\left. \frac{\partial(u(r,t))}{\partial r} \right _{r=0} = 0$ y $u(r,t) _{r=L} = 0$	(2)
--	-----

T, m, p, Ω y L son constantes datos. Es de interés la siguiente integral

$V(t) = \int_0^L u(r,t) 2 \pi r \, dr$	(3)
--	-----

que evalúa el volumen entre la configuración deformada de la membrana y el plano original.

MODELO NUMÉRICO

Se plantea una solución aproximada con una función discreta definida por **2 intervalos equidistantes** en el intervalo $[0; L]$, y usando derivadas numéricas centrales toda vez que sea posible, y siempre reglas de derivación con error de orden 2, **JUSTIFICAR** que se obtiene el siguiente modelo numérico,

$\frac{d^2(y(t))}{dt^2} + \left(\frac{4 T}{3 m \Delta r^2} \right) y(t) = \left(\frac{p}{m} \right) \sin(\Omega t)$	(4)
---	-----

Establecer la relación entre $u(r,t)$ (solución de la EDP (1-2)) y la función $y(t)$ solución de la EDO (4), según la **discretización de 2 intervalos** asumida.

Para $T = 15000/13$; $m = 0.1$; $p = 10$; $\Omega = 5$ y $L = 100$

ELABORAR en OCTAVE un programa que permita **RESPONDER justificadamente** las siguientes consignas (sólo válidas si se obtienen con el programa desarrollado).

- a) **RESOLVER la EDO (4) usando un método de Runge Kutta de segundo orden**, y tomando como $\Delta t = 0.01$ entre $t_0=0$ y $t_f=4$; y **valores iniciales nulos**

GRAFICAR a $u(L/2, t)$ en el intervalo de t dado por $[t_0; t_f]$.

Sabiendo que $v(r, t) = \frac{\partial u(r, t)}{\partial t}$

GRAFICAR a $v(L/2, t)$, como función de $u(L/2, t)$ en el intervalo de t dado por $[t_0; t_f]$.

- b) **ENTREGAR en $t_s = 1$** los valores de

$$u(0, t_s) = \quad u(L/2, t_s) = \quad u(L, t_s) =$$

Con el método de integración de Simpson, evaluar la integral (3) en $t_s = 1$

$$V(t_s) = \int_0^L u(r, t_s) 2 \pi r \, dr =$$

- c) La integración de Simpson aplicada en el inciso anterior tiene orden del error igual a.....

EJERCICIO INTEGRADOR 6: Usando Método de Runge Kutta de Segundo orden**MODELO MATEMÁTICO**

El comportamiento de un sistema dinámico se puede representar por el siguiente sistema de EDO de primer orden, **con valores iniciales nulos**:

$\begin{Bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(\rho^2) & -2\sigma & 0 \\ 1 & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} g(t)$	(1)
--	-----

Es de interés la función

$y(t) = A \ x_3(t)$	(2)
---------------------	-----

siendo

$A = \sqrt{\frac{I_g}{I_{33}}}$	$I_g = \int_0^{tf} [g(t)]^2 dt$	$I_{33} = \int_0^{tf} [x_3(t)]^2 dt$	(3)
---------------------------------	---------------------------------	--------------------------------------	-----

La función $g(t)$ es la siguiente combinación lineal de armónicas:

$g(t) = \sum_{k=1}^4 C_k \sin(\omega_k t)$	(4)
con $\omega_k = \{0.3 \ 0.6 \ 10 \ 15\}$ y $C_k = \{15 \ -15 \ -5 \ 5\}$	

MODELO NUMÉRICO

Elaborar un programa en OCTAVE/MATLAB, que permita responder justificadamente las siguientes consignas (sólo válidas si se obtienen con el programa desarrollado); resolviendo las funciones solución de sistema (1) mediante el método de EULER, y/o el método de RUNGE KUTTA (según sea lo solicitado); y las integrales con el método de Trapecios Compuestos.

Con los siguientes datos:

$$p=1.5 \quad \sigma=0.6 \quad \omega=3 \quad \rho = \sqrt{(\sigma^2 + \omega^2)}$$

$$N=1024 \quad tf=40.96 \quad \Delta t=0.04$$

se buscan soluciones numéricas en el intervalo de t dado por el segmento $[0; tf]$, con $tf=N \Delta t$.

GRAFICAR la función $g(t)$

El valor de la **integral I_g** , expresada en (3), resulta igual a $I_g=.....$

Usando el método de EULER Adelante (o Explícito) se obtiene el vector de soluciones aproximadas del sistema (1), y GRAFICAR la función correspondiente a la **componente $x_3(t)$**

El valor de la **integral I_{33}** , expresada en (3), resulta igual a $I_{33}=.....$

OBTENER y GRAFICAR la función $y(t)$ **Búsqueda de valor máximo positivo de $y(t)$ en un intervalo**

Considerar el intervalo cerrado de abscisas $t \in [0; 10]$ y encontrar el valor máximo positivo de la función $y(t)$ en dicho intervalo. Desarrollar un algoritmo que permita responder las siguientes consignas sin hacer uso de comandos especiales de OCTAVE tales como “find”, “max”, “min”, etc; y si use estructuras algorítmicas clásicas como “repetir” y/o “condicional”.

El valor máximo positivo es, a la que le corresponde un valor de la abscisa t igual a que está en la componente del vector que almacena los valores de t .

Precisión de la solución numérica

Para analizar la precisión de la solución numérica obtenida se **debe ENCONTRAR** otra solución numérica del sistema (1) con el mismo Δt usado anteriormente, pero usando el método de RUNGE KUTTA de Segundo Orden.

Es oportuno destacar que según sea la implementación en el código OCTAVE de la función $g(t)$, será la adecuada elección del parámetro w de Runge Kutta.

Con la solución obtenida con el método de RUNGE KUTTA de Segundo Orden se evalúa la integral I33 con el método de Trapecios Compuesto, y resulta igual a.....

Una **medida global del error de la solución aproximada** es comparar la integral I33 calculada con el método de Trapecios Compuesto, pero con las soluciones aproximadas correspondientes al método de Euler y al método de RUNGE KUTTA de Segundo Orden.

Así es conveniente calcular la diferencia entre los dos valores obtenidos de I33, y dividirlo por el más preciso de ellos

$$ErrorGlobal = 100 * \frac{abs(I33 \text{ con Euler} - I33 \text{ con RK})}{I33 \text{ más preciso}} = \dots$$

Se tomó como valor $I33 \text{ más preciso} =$

ya que el orden del Error del método de Euler utilizado es =

y el orden del Error del método de RUNGE KUTTA utilizado es =.....