

1 MÉTODOS ITERATIVOS PARA SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En numerosas aplicaciones en ingeniería los modelos numéricos quedan formulados con matrices cuadradas que tienen inversa, de gran número de filas y con muchos ceros (se las denomina matrices ralas o sparse matrix). En esas situaciones, para resolver sistemas de ecuaciones lineales, los métodos iterativos resultan muy ventajosos frente a los métodos de factorización.

1.1 Problemas algebraicos que comparten la única solución buscada

Problema A

Se busca el vector $\underline{x} \in R^{N \times 1}$ solución de un sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\mathbf{A} \cdot \underline{x} = \underline{b} \quad (1)$$

con $\mathbf{A} \in R^{N \times N}$, $\underline{b} \in R^{N \times 1}$ datos; y sabiendo que \mathbf{A} tiene inversa.

Es posible plantear el problema anterior en forma equivalente definiendo una función vectorial $\underline{f}(\underline{x}) = -\mathbf{A} \cdot \underline{x} + \underline{b}$ de variable vectorial $\underline{x} \in R^{N \times 1}$. Así el problema original se puede enunciar de la siguiente forma.

Problema B

Se busca el vector $\underline{x} \in R^{N \times 1}$ que anula la imagen de la función vectorial

$$\underline{f}(\underline{x}) = -\mathbf{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \quad (2)$$

es decir, que verifica la siguiente ecuación vectorial

$$\underline{f}(\underline{x}) = -\mathbf{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} = \underline{0} \quad (3)$$

con $\mathbf{A} \in R^{N \times N}$, $\underline{b} \in R^{N \times 1}$ datos; y sabiendo que \mathbf{A} tiene inversa.

Al considerar matrices $\mathbf{Q} \in R^{N \times N}$, tales que existe $\mathbf{Q}^{-1} \in R^{N \times N}$ (matriz inversa de \mathbf{Q}), es posible asegurar que los vectores solución de $\underline{f}(\underline{x}) = -\mathbf{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} = \underline{0}$ son soluciones de

$$\mathbf{Q} \underline{f}(\underline{x}) = \mathbf{Q} (-\mathbf{A} \cdot \underline{x} + \underline{b}) = \mathbf{Q} \underline{0} = \underline{0}$$

y si en esta última igualdad se suma \underline{x} en ambos miembros se puede plantear el siguiente problema

<u>Problema C</u>	
Se busca el vector $\underline{x} \in R^{Nx1}$ solución de la función vectorial	
$\underline{x} = \underline{x} + \mathbf{Q} \underline{f}(\underline{x}) \quad (4)$	
o bien,	
$\underline{x} = \underline{x} + \mathbf{Q} (-\mathbf{A} \cdot \underline{x} + \underline{b}) \quad (5)$	
con $\mathbf{A} \in R^{NxN}$, $\underline{b} \in R^{Nx1}$ datos; y sabiendo que \mathbf{A} y \mathbf{Q} tienen inversas.	

Los Problemas A B y C son equivalentes en el sentido que comparten la misma solución $\underline{x} \in R^{Nx1}$, para dados $\mathbf{A} \in R^{NxN}$ y $\underline{b} \in R^{Nx1}$.

1.2 Algoritmo genérico iterativo de Punto Fijo

A partir del Problema C es posible definir un algoritmo iterativo de tipo Punto Fijo en el cual **se propone una solución aproximada** mediante un vector arbitrario $\underline{x}_k \in R^{Nx1}$

Se calcula una nueva solución aproximada $\underline{x}_{k+1} \in R^{Nx}$ tomado como regla de recurrencia

$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \mathbf{Q} \underline{f}(\underline{x}_k) \quad (6)$	
o bien,	
$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \mathbf{Q} (-\mathbf{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{b}) \quad (7)$	

Se controla si la nueva solución aproximada es tal que

$\ \underline{f}(\underline{x}_{k+1}) \ _{\infty} = \ -\mathbf{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{b} \ _{\infty} < \text{Tolerancia 1} \quad (8.1)$	
o bien,	
$\ \underline{\Delta x}_{k+1} \ _{\infty} = \ \underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k \ _{\infty} < \text{Tolerancia 2} \quad (8.2)$	

Se actualiza en la forma

$\underline{x}_k = \underline{x}_{k+1} \quad (9)$	
---	--

cuando no se cumplan los controles de detención, y por lo tanto la solución aproximada no es suficientemente próxima a la solución exacta del problema.

Distintas elecciones de la matriz \mathbf{Q} dan origen a distintos métodos iterativos alternativos y asimismo aseguran la convergencia.

1.3 Convergencia del Algoritmo genérico iterativo de Punto Fijo

La solución exacta del sistema de ecuaciones lineales verifica la ecuación de punto fijo dada por ecuación (5)

$$\underline{x}_S = \underline{x}_S + \mathbf{Q} \left(-\mathbf{A} \cdot \underline{x}_S + \underline{b} \right) \quad (10)$$

y el algoritmo iterativo genera soluciones aproximadas mediante la regla de recurrencia dada por (7)

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \mathbf{Q} \left(-\mathbf{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{b} \right) \quad (11)$$

Restando miembro a miembro las ecuaciones (10-11) se obtiene que

$$\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_S = \underline{x}_k - \underline{x}_S + \mathbf{Q} \left(-\mathbf{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{b} \right) - \mathbf{Q} \left(-\mathbf{A} \cdot \underline{x}_S + \underline{b} \right) \quad (12)$$

que agrupando términos resulta

$$\begin{aligned} \left(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_S \right) &= \left(\underline{x}_k - \underline{x}_S \right) + \left(-\mathbf{Q} \mathbf{A} \cdot \underline{x}_k \right) + \mathbf{Q} \underline{b} \\ &\quad - \left(-\mathbf{Q} \mathbf{A} \cdot \underline{x}_S \right) - \mathbf{Q} \underline{b} \end{aligned} \quad (13)$$

o bien

$$\left(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_S \right) = \left(\underline{x}_k - \underline{x}_S \right) + (-\mathbf{Q} \mathbf{A}) \left(\underline{x}_k - \underline{x}_S \right) \quad (14)$$

Sacando factor común al vector $\left(\underline{x}_k - \underline{x}_S \right)$, error en la iteración k , resulta

$$\left(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_S \right) = (\mathbf{I} - \mathbf{Q} \mathbf{A}) \left(\underline{x}_k - \underline{x}_S \right) \quad (15.1)$$

$$\left(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_S \right) = \mathbf{T} \left(\underline{x}_k - \underline{x}_S \right) \quad (15.2)$$

De esta manera para que el error entre una iteración y otra disminuya la matriz $\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q} \mathbf{A})$ no puede ser cualquiera, y debe ser tal que

- La norma infinito de \mathbf{T} sea inferior a uno
- El radio espectral de \mathbf{T} sea inferior a uno

1.4 Condición de Convergencia en base a Norma Infinito

Aplicando Norma Infinito a ambos miembros de la ecuación (15.2) se tiene que

$$\left\| \underline{x}_{k+1} - \underline{x}_S \right\|_{\infty} = \left\| \mathbf{T} \left(\underline{x}_k - \underline{x}_S \right) \right\|_{\infty}$$

En base a propiedades de normas, se tiene que

$$\left\| \underline{x}_{k+1} - \underline{x}_S \right\|_{\infty} = \left\| \mathbf{T} \left(\underline{x}_k - \underline{x}_S \right) \right\|_{\infty} \leq \left\| \mathbf{T} \right\|_{\infty} \left\| \left(\underline{x}_k - \underline{x}_S \right) \right\|_{\infty}$$

$$\| \underline{x}_{k+1} - \underline{x}_S \|_{\infty} \leq \| \mathbf{T} \|_{\infty} \| (\underline{x}_k - \underline{x}_S) \|_{\infty}$$

Para que la norma infinito del error disminuya entre una iteración y otra, se debe exigir que

$\ \mathbf{T} \ _{\infty} = \ \mathbf{I} - \mathbf{Q} \mathbf{A} \ _{\infty} < 1$	(16)
---	------

1.5 Condición de Convergencia en base a Radio Espectral

A partir de la ecuación (15.2) se tiene que en las distintas iteraciones se tiene que

$$\begin{aligned} (\underline{x}_1 - \underline{x}_S) &= \mathbf{T} (\underline{x}_0 - \underline{x}_S) \\ (\underline{x}_2 - \underline{x}_S) &= \mathbf{T} (\underline{x}_1 - \underline{x}_S) = \mathbf{T} \mathbf{T} (\underline{x}_0 - \underline{x}_S) \\ (\underline{x}_3 - \underline{x}_S) &= \mathbf{T} (\underline{x}_2 - \underline{x}_S) = \mathbf{T} \mathbf{T} \mathbf{T} (\underline{x}_0 - \underline{x}_S) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$(\underline{x}_k - \underline{x}_S) = \mathbf{T}^k (\underline{x}_0 - \underline{x}_S)$	(17)
--	------

Considerando la posibilidad de diagonalización de \mathbf{T} mediante sus autovalores y autovectores se tiene que

$\mathbf{T} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{P}^{-1}$	(18)
--	------

donde \mathbf{P} es una matriz de cambio de base formada por los autovectores de \mathbf{T} asociados a los autovalores de \mathbf{T} que se ubican en la diagonal principal de la matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$. De esta manera resulta que

$$\mathbf{T}^k = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda}^k \cdot \mathbf{P}^{-1}$$

y por lo tanto

$(\underline{x}_k - \underline{x}_S) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{\Lambda}^k \cdot \mathbf{P}^{-1} (\underline{x}_0 - \underline{x}_S)$	(19)
---	------

Si los autovalores de \mathbf{T} son menores todos en valor absoluto menor a uno, la matriz $\mathbf{\Lambda}^k$ tendrá elementos que en cada iteración son más pequeños y así el vector error en la iteración k dado por $(\underline{x}_k - \underline{x}_S)$ tendrá componentes cada vez más pequeñas y tenderá al vector nulo.

Dado que el *radio espectral de una matriz es el máximo de los valores absolutos de sus autovalores*, entonces el vector error en la iteración k dado por $(\underline{x}_k - \underline{x}_S)$ tenderá al vector nulo cuando el *radio espectral de la matriz $\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q} \mathbf{A})$ sea menor a 1*.

1.6 Método de Jacobi a partir del Algoritmo genérico iterativo de Punto Fijo

A partir del Problema A original, se considera que la matriz de coeficientes \mathbf{A} se puede formar por la suma de

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{B}$$

siendo \mathbf{D} una matriz diagonal, cuyos elementos no nulos son todos los elementos de la diagonal principal de la matriz \mathbf{A} ; y la matriz \mathbf{B} , es la matriz complementaria obtenida como $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{D}$.

El esquema iterativo del Método de Jacobi se obtiene al definir la matriz \mathbf{Q} en las ecuaciones (6-7) como

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}^{-1}$$

El algoritmo iterativo del Método de Jacobi se reproduce al considerar como regla de recurrencia la ecuación (7) en la cual se reemplaza $\mathbf{Q} = \mathbf{D}^{-1}$, para obtener

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \mathbf{D}^{-1} (-\mathbf{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{b})$$

y al considerar que $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{B}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{x}_k + \mathbf{D}^{-1} (-(\mathbf{D} + \mathbf{B}) \cdot \underline{x}_k + \underline{b}) \\ \underline{x}_{k+1} &= \underline{x}_k - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D} \cdot \underline{x}_k (-(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}) \cdot \underline{x}_k + \mathbf{D}^{-1} \underline{b}) \end{aligned}$$

Así la regla de recurrencia del método de Jacobi resulta dada por

$\underline{x}_{k+1} = -(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}) \cdot \underline{x}_k + \mathbf{D}^{-1} \underline{b}$ $\underline{x}_{k+1} = \mathbf{T}_J \cdot \underline{x}_k + \underline{c}_J$ <p>con $\mathbf{T}_J = -(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{B})$ y $\underline{c}_J = \mathbf{D}^{-1} \underline{b}$</p>	(20)
--	------

El esquema iterativo del método de Jacobi se complementa con los controles de detención y la actualización de variables dados por (8-9).

Al contemplar que para los controles de detención dados en ecuaciones (8) se deben evaluar los vectores $\underline{f}(\underline{x}_{k+1}) = -\mathbf{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{b}$, y $\Delta \underline{x}_{k+1} = \underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k$, resulta conveniente por un criterio de eficiencia en la cantidad de cálculos a realizar considerar como regla de recurrencia la ecuación (6) en la cual se reemplaza $\mathbf{Q} = \mathbf{D}^{-1}$, para obtener la siguiente regla de recurrencia alternativa para el método de Jacobi

$\underline{\Delta x_{k+1}} = \mathbf{D}^{-1} \underline{f(x_k)}$	(21.1)
$\underline{\Delta x_{k+1}} = \underline{x_k} + \underline{\Delta x_{k+1}}$	(21.2)

que por ser \mathbf{D} una matriz diagonal, su inversa es una matriz diagonal y el cálculo de la ecuación (21.1) es simplemente tomar cada elemento del vector $\underline{f(x_k)}$ y dividirlo por el elemento de la correspondiente diagonal principal de la matriz original \mathbf{A} .

La convergencia del método de Jacobi se puede considerar a partir de la convergencia del esquema general dado por las propiedades exigidas a la matriz $\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q}\mathbf{A})$ definida en (15).

Así al reemplazar $\mathbf{Q} = \mathbf{D}^{-1}$, en (15) se obtiene que

$$\mathbf{T}_J = \mathbf{I} - (\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})$$

Pero dado que $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{B}$, se tiene

$$\mathbf{T}_J = \mathbf{I} - (\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} + \mathbf{B})) = \mathbf{I} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{D} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}$$

obteniendo nuevamente

$$\mathbf{T}_J = -(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B})$$

Cuya norma infinita debe ser menor a uno, o alternativamente su radio espectral menor a uno para asegurar convergencia.

1.7 Método de Gauss Seidel a partir del Algoritmo genérico iterativo de Punto Fijo

A partir del *Problema A original*, se considera que la matriz de coeficientes \mathbf{A} se puede formar por la suma de

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$$

siendo \mathbf{D} una matriz diagonal, cuyos elementos no nulos son todos los elementos de la diagonal principal de la matriz \mathbf{A} ; y la matriz $\mathbf{L}+\mathbf{U}$, es la matriz complementaria obtenida como $\mathbf{L}+\mathbf{U}=\mathbf{A}-\mathbf{D}$. Siendo $\mathbf{L}+\mathbf{U}$ igual a la matriz \mathbf{B} del método de Jacobi.

La matriz \mathbf{L} es una matriz triangular inferior con elementos no nulos debajo de la diagonal principal e iguales a los respectivos elementos de la matriz \mathbf{A} . La matriz \mathbf{U} es una matriz triangular superior con elementos no nulos arriba de la diagonal principal e iguales a los respectivos elementos de la matriz \mathbf{A} . Es decir, las componentes de \mathbf{L} y \mathbf{U} son:

$\mathbf{L}(i,j) \begin{cases} = 0 & \text{si } j \geq i \\ = \mathbf{A}(i,j) & \text{si } j < i \end{cases}$	$\mathbf{U}(i,j) \begin{cases} = 0 & \text{si } j < i \\ = \mathbf{A}(i,j) & \text{si } j \geq i \end{cases}$	(22)
---	---	------

El esquema iterativo del Método de Gauss Seidel se obtiene al definir la matriz \mathbf{Q} en las ecuaciones (6-7) como

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}$$

El algoritmo iterativo del Método de Gauss Seidel se reproduce al considerar como regla de recurrencia la ecuación (7) en la cual se reemplaza $\mathbf{Q} = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}$, para obtener

$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} (-\mathbf{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{b})$	(23)
--	------

y al considerar que $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$ se obtiene

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} (-(\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}) \cdot \underline{x}_k + \underline{b})$$

que al aplicar propiedad distributiva se tiene

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \left(- \left((\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} (\mathbf{L} + \mathbf{D}) \right) \cdot \underline{x}_k - (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \mathbf{U} \cdot \underline{x}_k + (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \underline{b} \right)$$

que resulta en

$$\underline{x}_{k+1} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \mathbf{U} \cdot \underline{x}_k + (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \underline{b}$$

Al pre multiplicar por izquierda en ambos miembro por $(\mathbf{L} + \mathbf{D})$ queda

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D}) \underline{x}_{k+1} = -\mathbf{U} \cdot \underline{x}_k + \underline{b}$$

De donde se puede separar el lado izquierdo de la igualdad

$$\mathbf{L} \underline{x}_{k+1} + \mathbf{D} \underline{x}_{k+1} = -\mathbf{U} \cdot \underline{x}_k + \underline{b}$$

y despejar

$$\mathbf{D} \underline{x}_{k+1} = -\mathbf{L} \underline{x}_{k+1} - \mathbf{U} \cdot \underline{x}_k + \underline{b}$$

Así la regla de recurrencia dada por ecuación (23), resulta:

$\underline{x}_{k+1} = -(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}) \cdot \underline{x}_{k+1} - (\mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}) \cdot \underline{x}_k + \mathbf{D}^{-1} \underline{b}$	(24)
--	------

que es la regla de recurrencia del método de Gauss Seidel clásica. El esquema iterativo se complementa con los controles de detención y la actualización de variables dados por (8-9).

Al contemplar que para los controles de detención dados en ecuaciones (8) se deben evaluar los vectores $\underline{f}(\underline{x}_{k+1}) = -\mathbf{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{b}$, y $\underline{\Delta x}_{k+1} = \underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k$. Resulta conveniente por un criterio de eficiencia en la cantidad de cálculos a realizar considerar como regla de recurrencia la ecuación (6) en la cual se reemplaza $\mathbf{Q} = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}$, para obtener la siguiente regla de recurrencia alternativa para el método de Gauss Seidel

$\underline{\Delta x}_{k+1} = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1} \underline{f}(\underline{x}_k)$	(25.1)
$\underline{\Delta x}_{k+1} = \underline{x}_k + \underline{\Delta x}_{k+1}$	(25.2)

que por ser $\mathbf{L}+\mathbf{D}$ una matriz triangular inferior, su inversa no es conveniente obtenerla. Es más eficiente cambiar la ecuación (25.1) por el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$(\mathbf{L} + \mathbf{D}) \underline{\Delta x}_{k+1} = \underline{f}(\underline{x}_k)$	(26.1)
$\underline{\Delta x}_{k+1} = \underline{x}_k + \underline{\Delta x}_{k+1}$	(26.2)

Se debe destacar que el sistema de ecuaciones lineales de ecuación (26.1) es conveniente resolverlo con el *algoritmo de sustitución adelante*. El esquema iterativo de Gauss Seidel se complementa con los controles de detención y la actualización de variables dados por (8-9).

1.8 Algoritmo de Sustitución Adelante

Dado un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{M} \cdot \underline{x} = \underline{f}$$

con \underline{f} un vector dato de $n \times 1$; y \mathbf{M} una matriz triangular inferior de $N \times N$ (cuyos elementos por arriba de la diagonal principal son todos nulos); es posible obtener cada una de las incógnitas aplicando el siguiente algoritmo denominado *sustitución hacia adelante*

```

for i=1:N
  s=0
  for j=1:i-1
    s=s + M(i,j) f(j)
  end
  x(i)=(f(i) - s)/M(i,i)
end

```

Se debe destacar que los elementos de la diagonal principal de la matriz \mathbf{M} deben ser no nulos (lo que asegura la existencia de su matriz inversa).

Cuando este algoritmo se aplica al sistema de ecuaciones dado por (26.1), considerando las definiciones de \mathbf{L} y \mathbf{D} dadas por (22) resulta

```

for i=1:N
  s=0
  for j=1:i-1
    s= s + A(i,j) f(j)
  end
  x(i)=(f(i) - s)/A(i,i)
end

```

1.9 Resumen

Para resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{A} \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Se considera que la matriz A se puede plantear como suma de matrices

en el método de Jacobi	en el método de Gauss Seidel
$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{B}$	$\mathbf{A} = (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})$

Se propone \underline{x}_k arbitrario, y se calcula

$$\underline{f}(\underline{x}_k) = -\mathbf{A} \cdot \underline{x}_k + \underline{b}$$

Se aplica la siguiente regla de recurrencia

en el método de Jacobi	en el método de Gauss Seidel
$\underline{\Delta x}_{k+1} = \mathbf{D}^{-1} \underline{f}(\underline{x}_k)$ con división de componentes	$(\mathbf{L} + \mathbf{D})\underline{\Delta x}_{k+1} = \underline{f}(\underline{x}_k)$ con algoritmo de sustitución adelante

Se calcula

$$\underline{\Delta x}_{k+1} = \underline{x}_k + \underline{\Delta x}_{k+1}$$

Se calcula

$$\underline{f}(\underline{x}_{k+1}) = -\mathbf{A} \cdot \underline{x}_{k+1} + \underline{b}$$

Se controla si

$$\|\underline{f}(\underline{x}_{k+1})\|_{\infty} = \|\mathbf{A} \cdot \underline{x}_{k+1} - \underline{b}\|_{\infty} < \textit{Tolerancia 1}$$

o bien, si

$$\|\underline{\Delta x}_{k+1}\|_{\infty} = \|\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k\|_{\infty} < \textit{Tolerancia 2}$$

Si es necesario, se actualiza para aplicar la regla de recurrencia

$$\underline{x}_k = \underline{x}_{k+1}$$

El proceso iterativo se detiene cuando alguna de las normas infinitas (o ambas) se satisfacen según las tolerancias admitidas, siendo el último vector \underline{x}_{k+1} la solución aproximada obtenida.