

Comportamiento no lineal de estructuras

Nociones de análisis no lineal

Dr. Francisco Crisafulli
Profesor Titular
Mayo 2024

Modelación de un problema físico

Definir el problema físico



Implementar un modelo matemático (continuo)

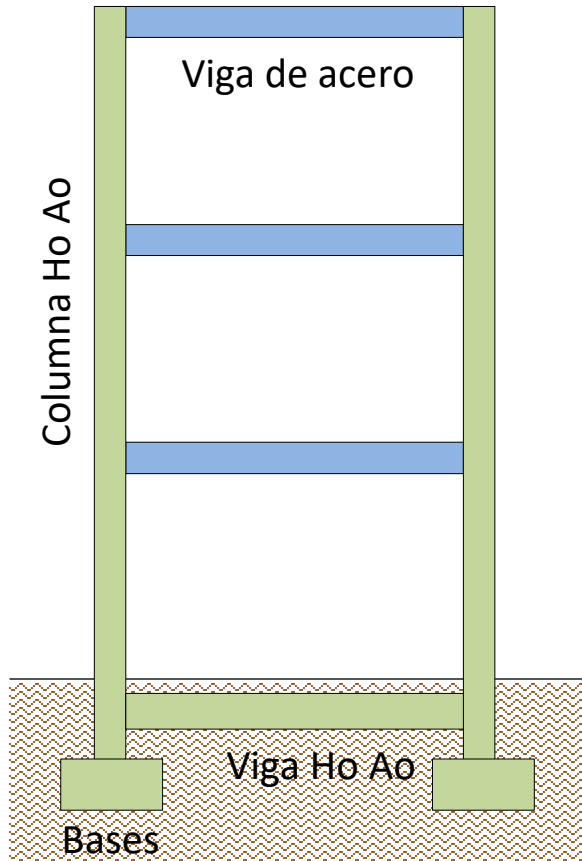
- Sistema de ecuaciones algebraicas o diferenciales
- Condiciones iniciales y de contorno.
- Resolver el sistema de ecuaciones.

Implementar un modelo discreto (numérico)

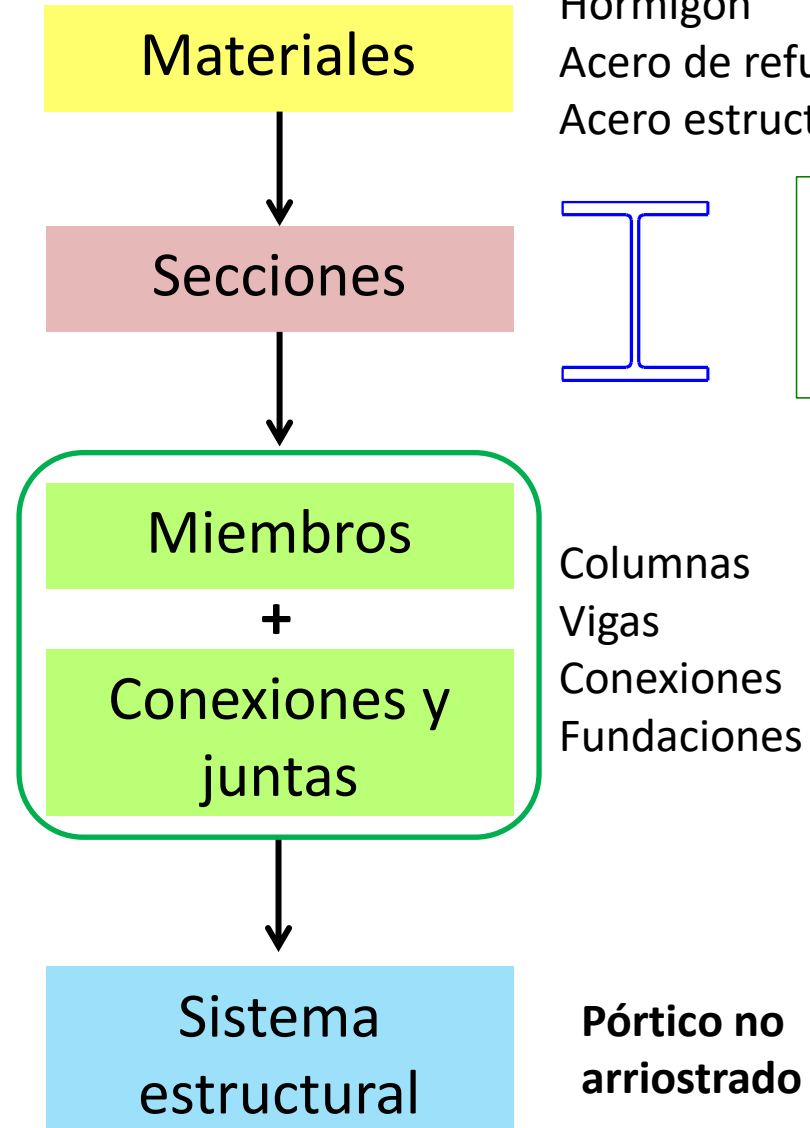
- Discretización del dominio → generación de la malla.
- Modelo discreto
- Resolver el sistema discreto.

Método de los elementos finitos, FEM
Método de los elementos discretos, DEM

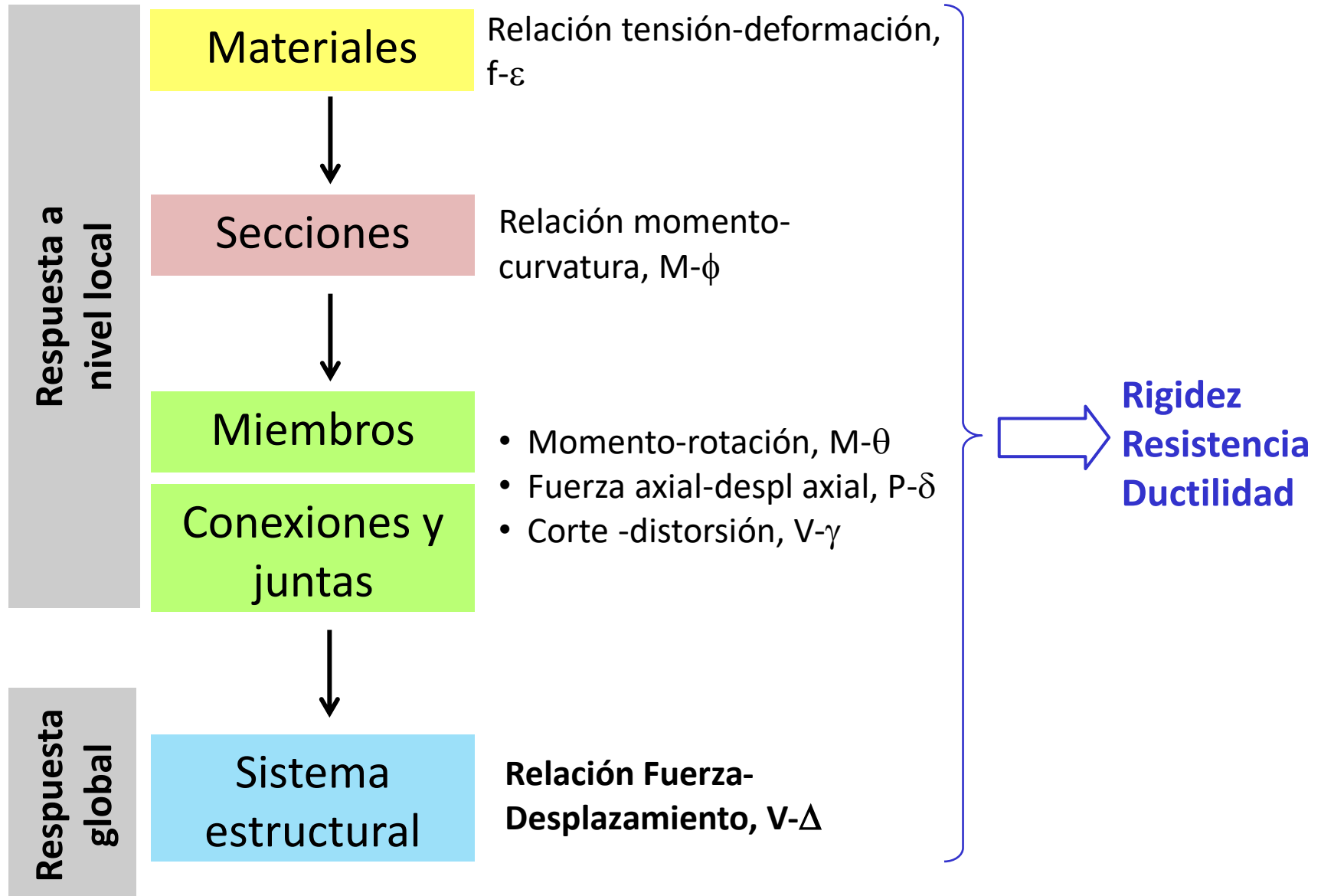
Sistema estructural



Pórtico no arriostrado



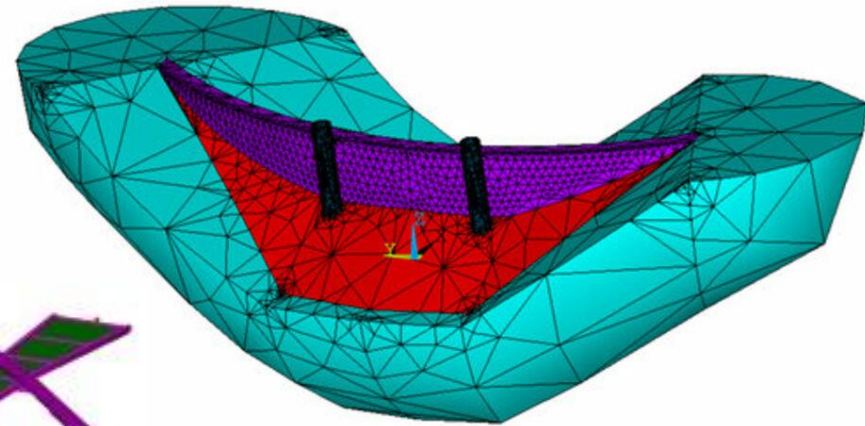
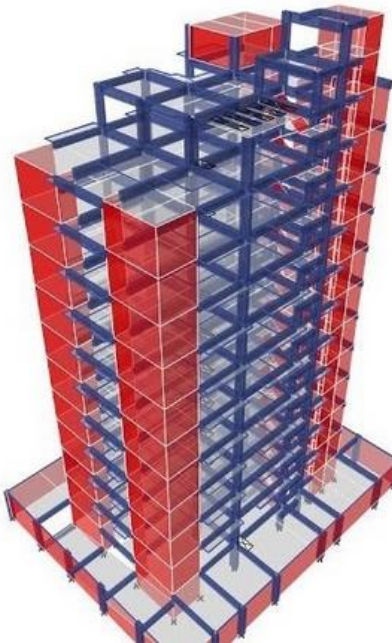
Respuesta del sistema estructural



Método de los elementos finitos

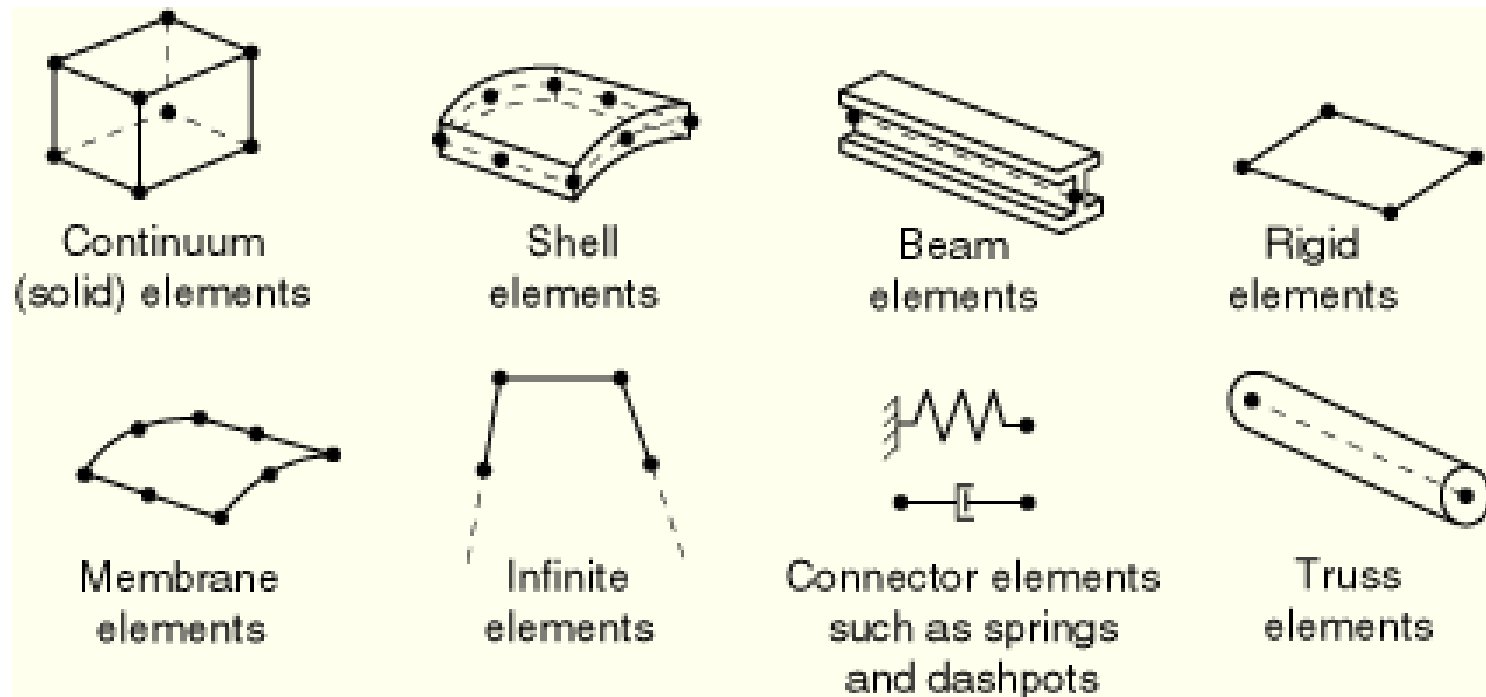
El continuo se discretiza dividiéndolo en **elementos**, de distinto tipo, los cuales se conectan entre sí en ciertos puntos llamados **nodos o nudos**, en los cuales se definen los **grados de libertad** (variables cinemáticas).

Las variables cinemáticas se calculan en los nodos y se usan funciones de forma para determinar esas variables en otros puntos de la estructura.

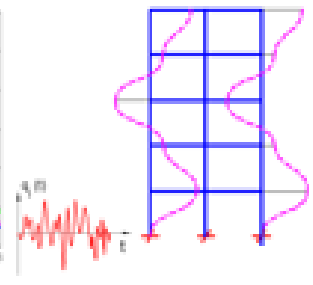
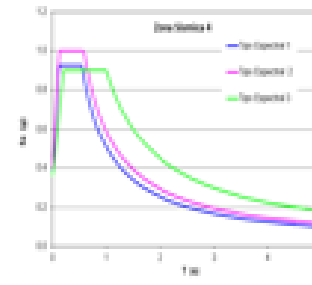
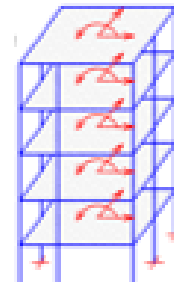


Tipos de elementos

- Elementos de barra-1D, (2 nodos).
- Elementos 2D, (3, 4, 8 nodos)
- Elementos 3D o sólidos , (tetraedro, 4 nodos, prisma rectangular, 8 nodos, etc.)
- Resortes, amortiguadores, elementos de contacto, etc. (1 o varios nodos)



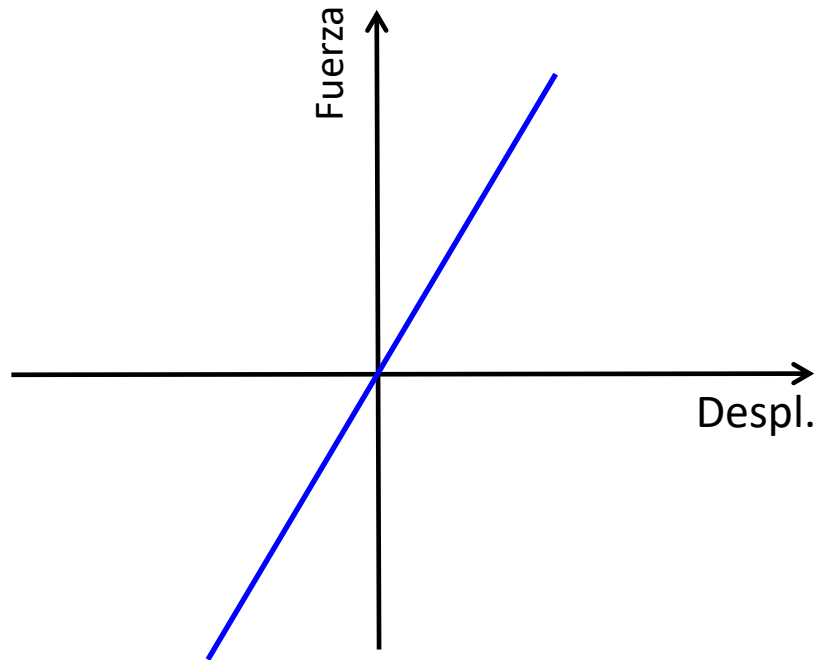
Ingeniería Sismorresistente



Comportamiento no lineal de estructuras

Comportamiento no lineal

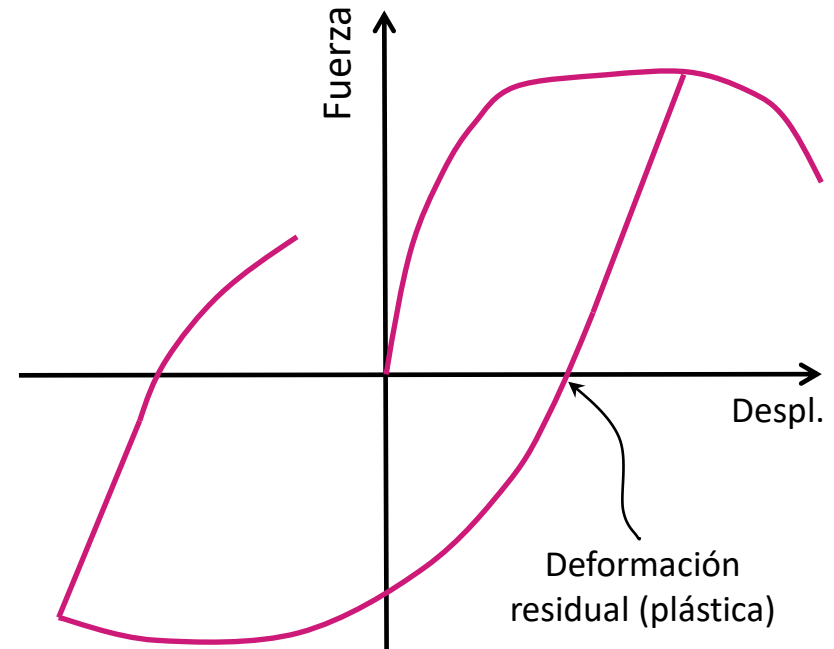
¿Qué es la no linealidad? Básicamente, es la inexistencia de proporcionalidad entre dos o más variables que describen un fenómeno dado.



Respuesta lineal y elástica

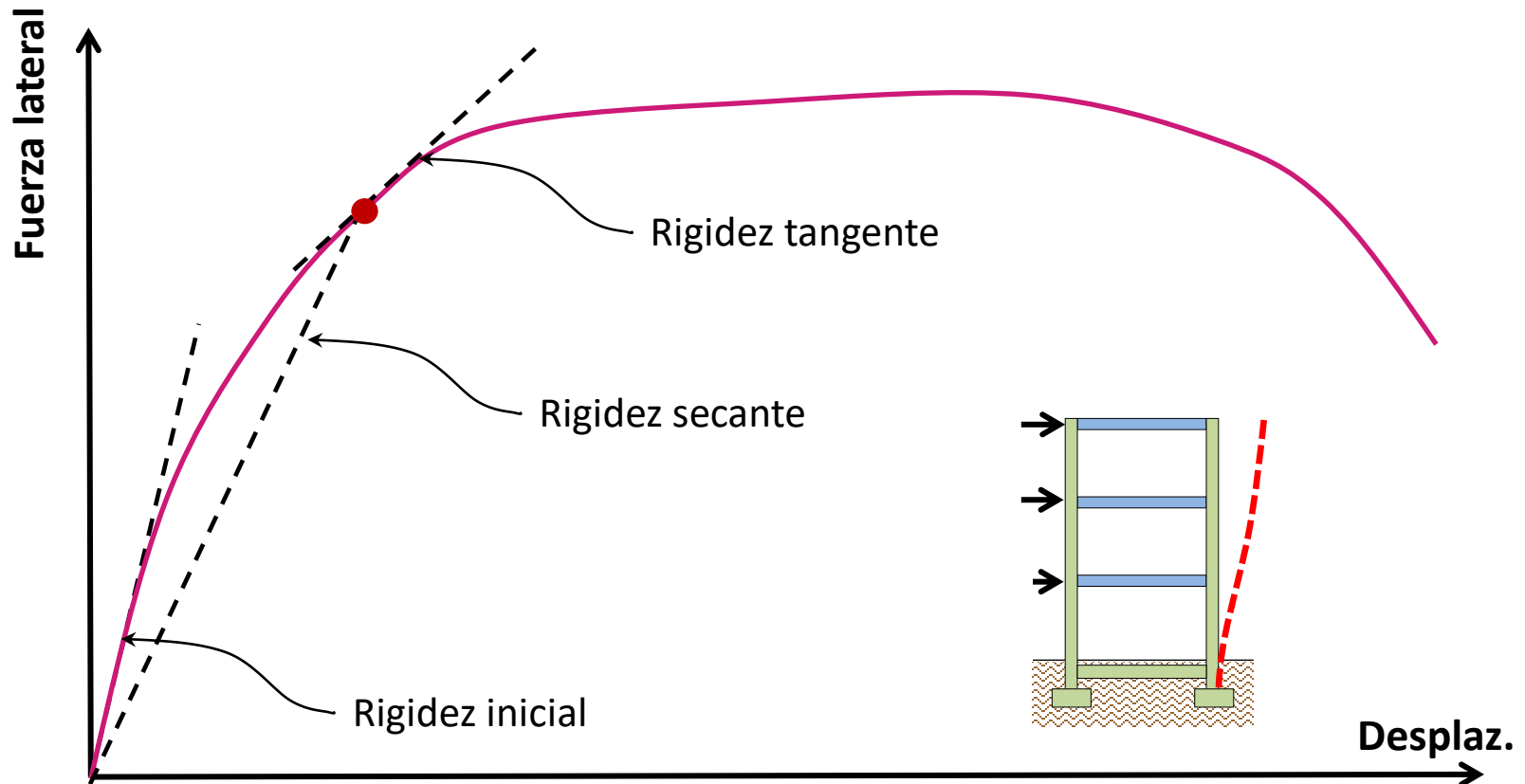
La deformación es proporcional a la fuerza

La deformación es reversible



Respuesta no lineal

Comportamiento no lineal



La rigidez varía dependiendo del desplazamiento $\rightarrow k = f(u)$

Cuando actúan cargas cíclicas debe considerarse efectos de histerésis.

Comportamiento no lineal

Tipos de efectos no lineales en estructuras:

- **No linealidad del material.**
- **No linealidad geométrica.**
- **No linealidad por cambio de condición** (*changing-status*), también no linealidad de contacto (*contact nonlinearity*), o no linealidad debido a condiciones de contorno (*nonlinearity at boundary conditions*).

En este curso consideraremos principalmente el comportamiento y análisis no lineal debido a los materiales.

No linealidad del material

Todos los materiales estructurales presentan algún tipo de comportamiento no lineal (principalmente porque no se cumple la Ley de Hooke).

- Acero: fluencia, endurecimiento, pandeo local o global, efecto Baushinger.
- Hormigón: fisuración, diferente comportamiento en tracción y compresión, curvas tensión-deformación no lineales dependientes del confinamiento.
- Mampostería: similar al hormigón.
- Madera: curvas tensión-deformación no lineales, comportamiento diferente según el tipo de esfuerzo.
- Suelo: curvas tensión-deformación no lineales.

No linealidad geométrica

En el análisis estructural elástico, se asume que la posición final deformada coincide con la posición inicial, de modo que las ecuaciones de equilibrio se formulan en la posición inicial. Además, se consideran ecuaciones de compatibilidad donde se desprecian diferenciales de orden superior.

En muchos casos, particularmente en estructuras flexibles, estas hipótesis no son aceptables. Debido a ello, la magnitud de los desplazamientos y deformaciones afecta la respuesta de la estructura.

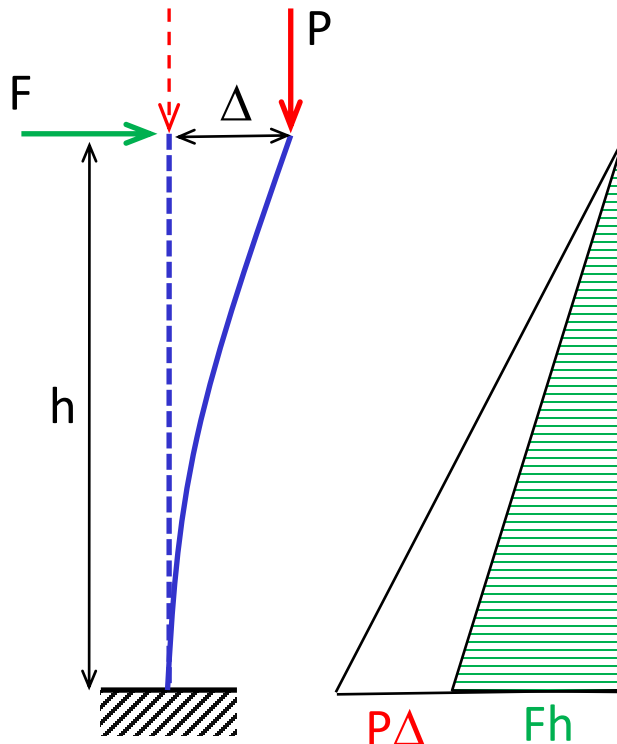
Tipos de análisis por no linealidad geométrica

- Análisis con “pequeños desplazamientos”: el equilibrio se considera en la posición deformada y las relaciones de compatibilidad se asumen como lineales (o desplazamientos despreciables).
- Análisis con “grandes desplazamientos”: el equilibrio se considera en la posición deformada y las relaciones de compatibilidad son no lineales (o desplazamientos con valores finitos no despreciables).
- Análisis P-Delta: el equilibrio se considera en la posición deformada (con alguna aproximación) y las relaciones de compatibilidad se asumen como lineales.

Proceso incremental de cargas: sucesivos pasos de análisis elástico con actualización de la geometría, según la deformada.

Efecto P- Δ

Considera en forma simplificada el momento de vuelco adicional por cargas gravitatorias P , cuando la estructura experimenta desplazamientos Δ laterales por efecto de acciones laterales F :

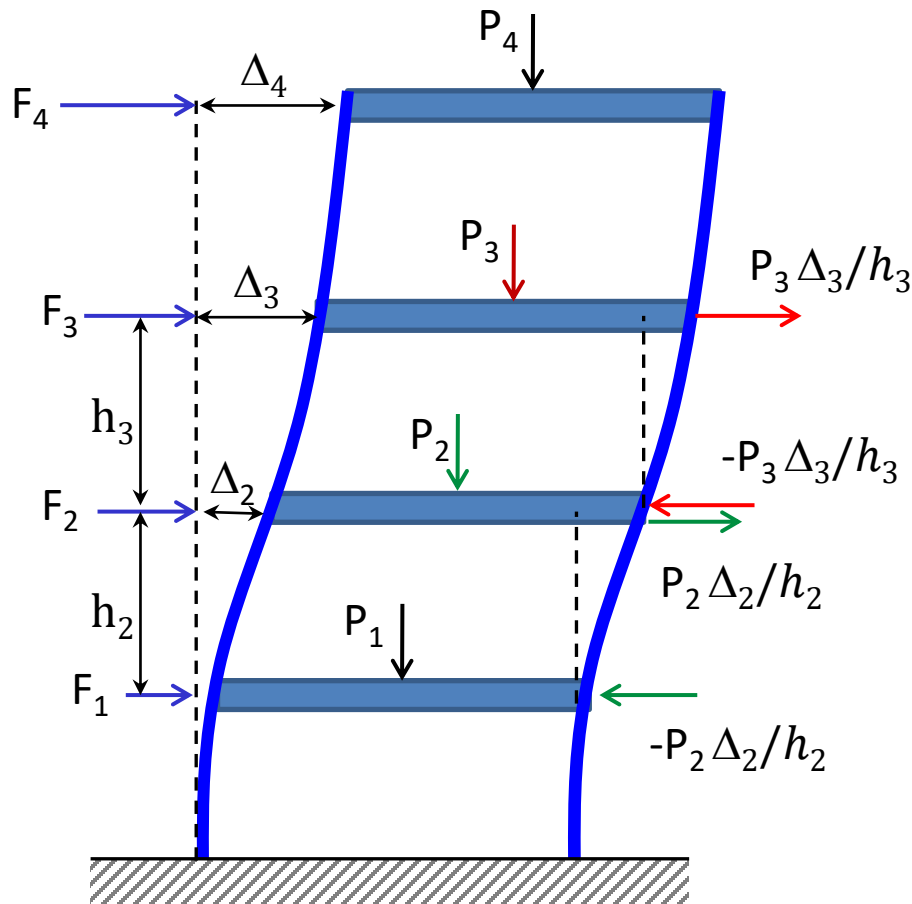


La consideración del efecto P- Δ resulta en un incremento de los desplazamientos laterales (menor rigidez, mayor periodo de vibración) y aumento de sollicitaciones.

Este efecto puede ser significativo en estructuras más flexibles, como pórticos a momento.

Análisis P-Δ en edificios

La carga gravitatoria en un piso cualquiera, P_i , genera un momento de vuelco adicional $P_i \Delta_i$. Este efecto se puede considerar mediante una cupla cuyas fuerzas son $P_i \Delta_i / h_i$.



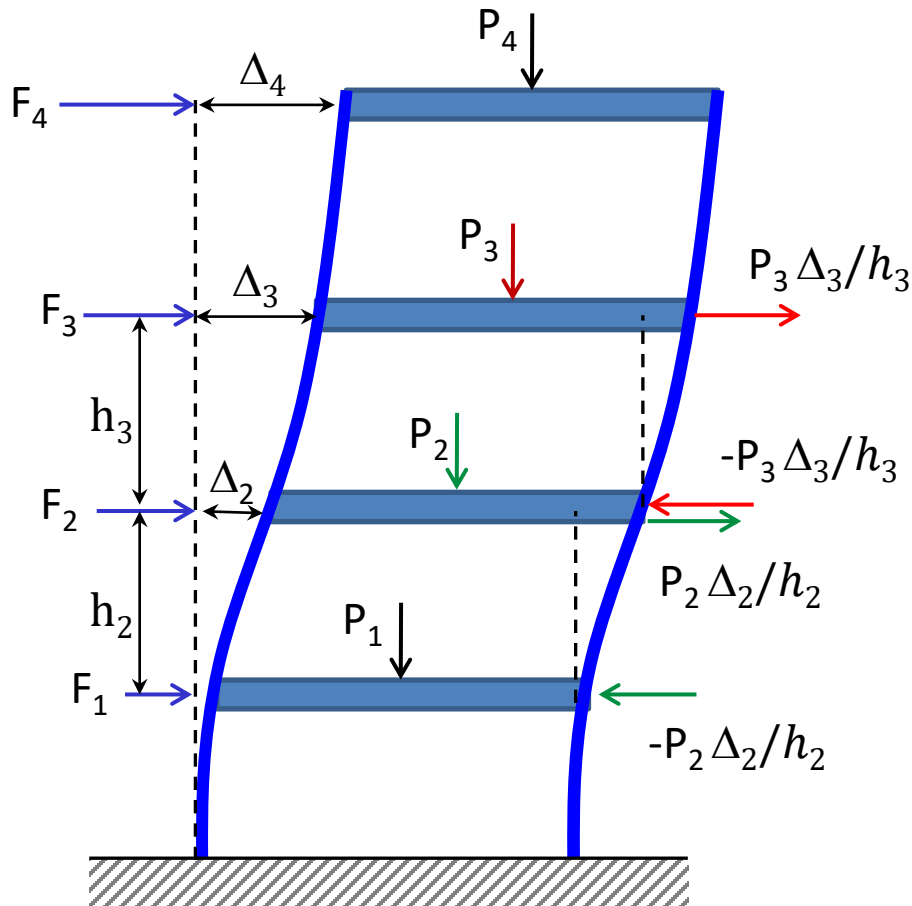
Las fuerzas laterales de la cupla $P_i \Delta_i$ son (en forma matricial):

$$\begin{Bmatrix} F_{Gi} \\ F_{Gi-1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i / h_i & 0 \\ -P_i / h_i & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_i \\ \Delta_{i-1} \end{Bmatrix}$$

Si consideramos ahora el efecto de la cupla $P_{i-1} \Delta_{i-1}$:

$$\begin{Bmatrix} F_{Gi} \\ F_{Gi-1} \\ F_{Gi-2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i / h_i & 0 & 0 \\ -P_i / h_i & P_{i-1} / h_{i-1} & 0 \\ 0 & -P_{i-1} / h_{i-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_i \\ \Delta_{i-1} \\ \Delta_{i-2} \end{Bmatrix}$$

Análisis P-Δ en edificios



Aplicando el mismo criterio para todos los niveles, podemos reformular la ecuación de equilibrio para considerar las fuerzas

$$\{F\} + \{F_G\} = [K]\{\Delta\}$$

$$\{F\} = [K]\{\Delta\} - \{F_G\}$$

$$\{F\} = [K]\{\Delta\} - [f(P_i, h_i)]\{\Delta\}$$

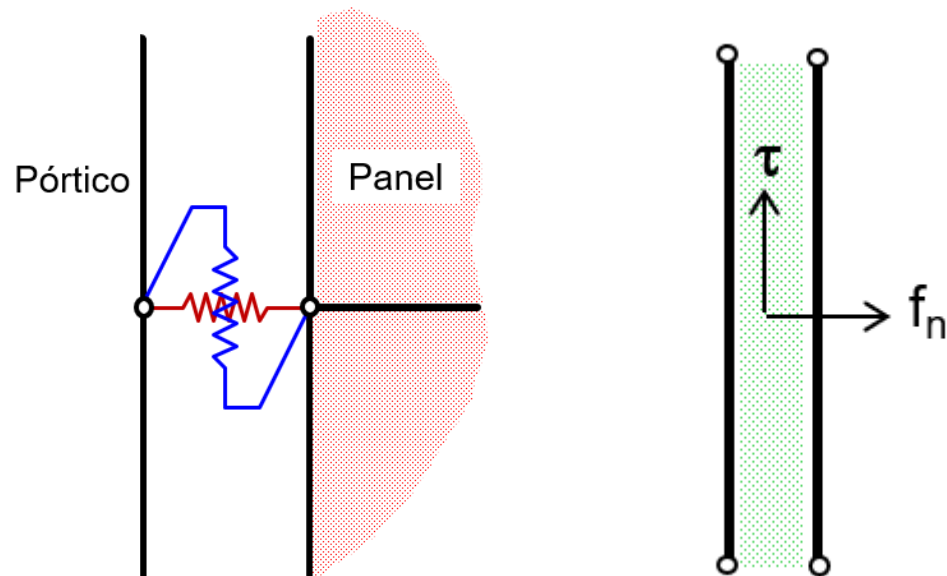
$$\{F\} = ([K] - [K_G])\{\Delta\}$$

$[K_G]$ es la matriz de rigidez geométrica, función de las alturas h_i y de las cargas gravitatorias P_i

No linealidad de contacto

Este efecto se produce cuando las condiciones entre dos o más partes o superficies de la estructura analizada cambian cuando ésta se deforma.

Los programas de análisis estructural incorporan distintos elementos para modelar las interfaces.



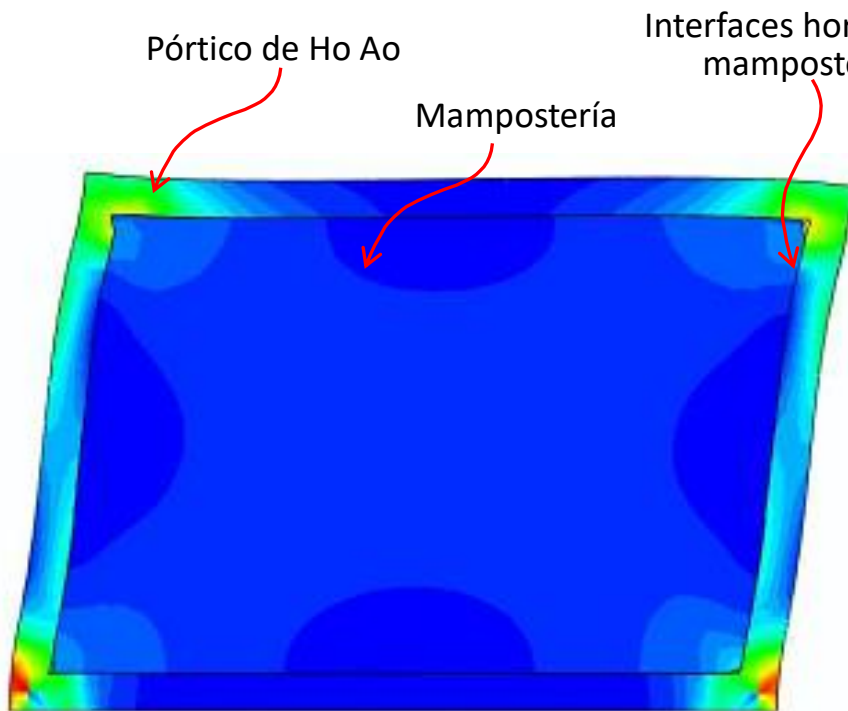
No linealidad de contacto

Ejemplos:

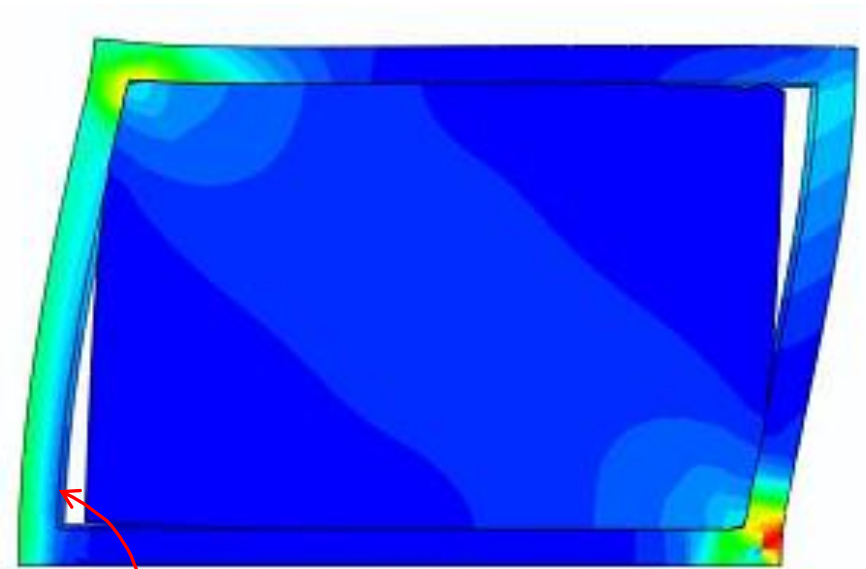
- La superficie de contacto entre una base de fundación y el suelo.
- Dos edificios con poca separación sometidos a la acción sísmica.
- Grietas en el hormigón.
- Interfaces entre dos materiales con propiedades mecánicas diferentes.
- Deslizadores sísmicos.

Ejemplo: muro de mampostería confinada

El modelo de elementos finitos planos (2D) considera la no linealidad del material y de contacto (separación en las interfaces).



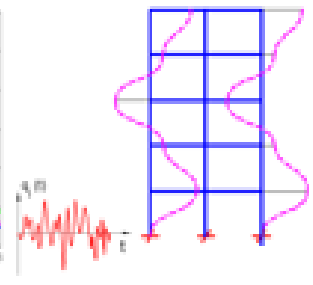
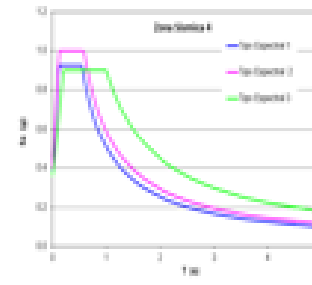
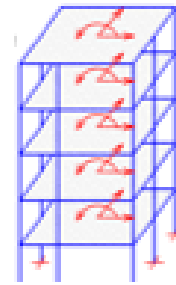
**Interfaces en contacto
(adherencia)**



**Interfaces parcialmente
separadas**

Separación de la interface hormigón-
mampostería

Ingeniería Sismorresistente



Nociones de análisis no lineal

Modelación de la no linealidad del material

Aspectos a considerar para la implementación práctica:

Modelación. Tipos de elementos

- Resortes
- Elementos de barra (1D) o Elementos 2D y 3D.
- Macro elementos (con varios componentes)

Procedimientos de análisis

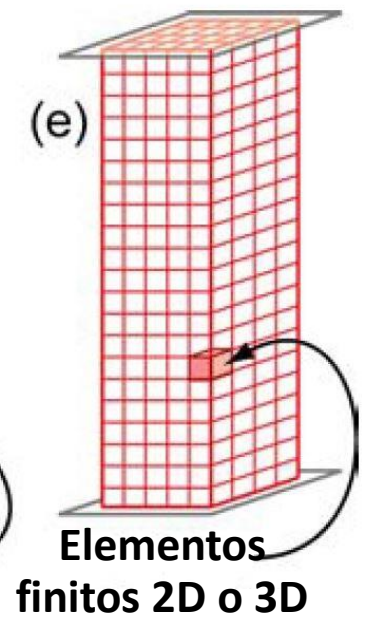
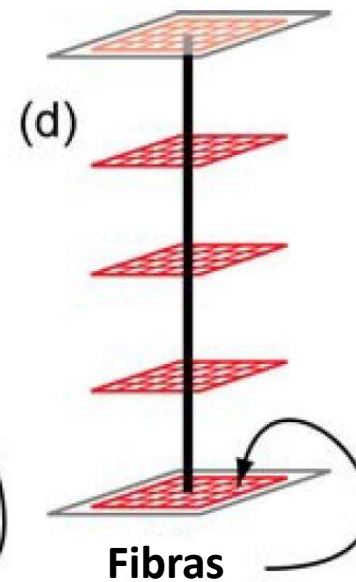
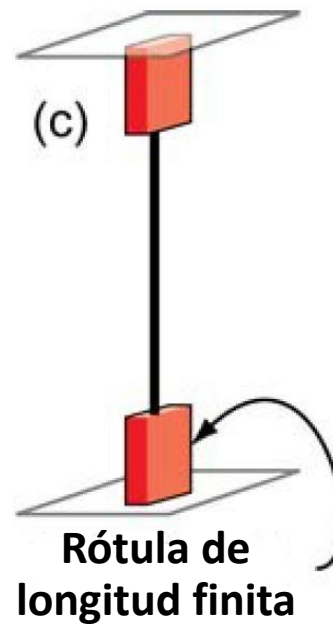
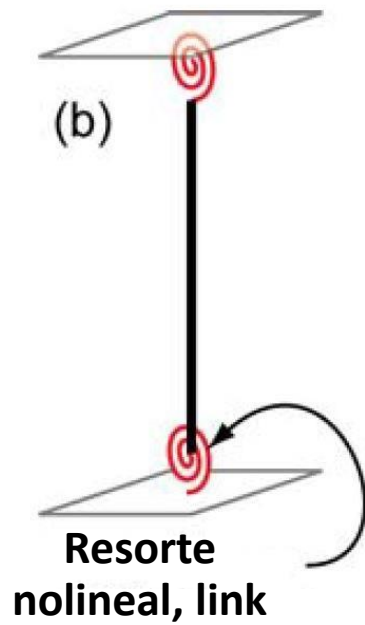
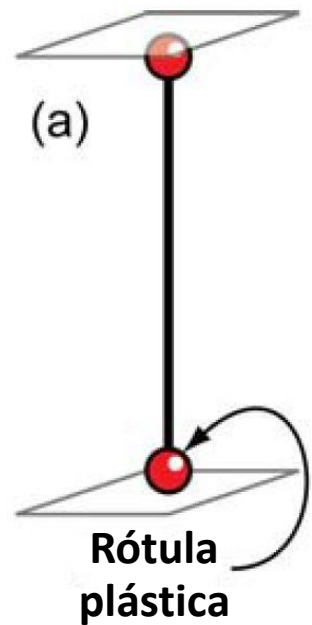
- Análisis plástico
- Análisis estático
- Análisis dinámico

La definición de las propiedades no lineales varía según el **tipo de elemento**, el **modelo** considerado y el **procedimiento de análisis** a implementar.

Modelación de la no linealidad del material

Elementos de barra (1D)

Elem. 2D o 3D



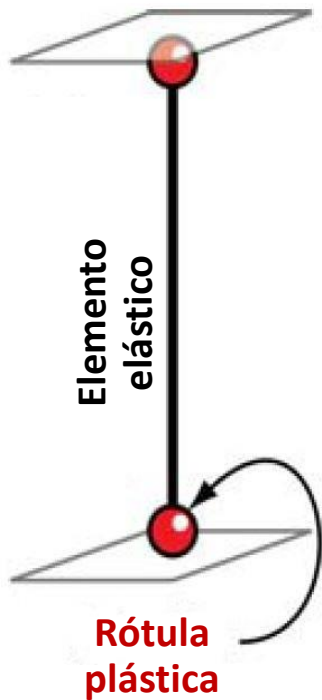
Plasticidad concentrada

Plasticidad distribuida

(debería ser no linealidad concentrada o distribuida)

Modelos de plasticidad concentrada – Elementos de barra

Rótulas plásticas



- ¿Qué es una rótula plástica? Es una zona donde se concentran las deformaciones inelásticas por flexión.
- Comportamiento de la rótula: se define a través de la relación momento-rotación:

Momento-curvatura, $M-\phi$ → Momento-rotación, $M-\theta$
(análisis seccional)

- Rótula plástica \neq Articulación (rotación libre sin capacidad de resistir momento flector)

Rótulas plásticas

Momento-curvatura, $M-\phi$ \rightarrow ? Momento-rotación, $M-\theta$

- Método teórico: integración de las curvaturas a lo largo de la barra (según diagrama de solicitaciones).

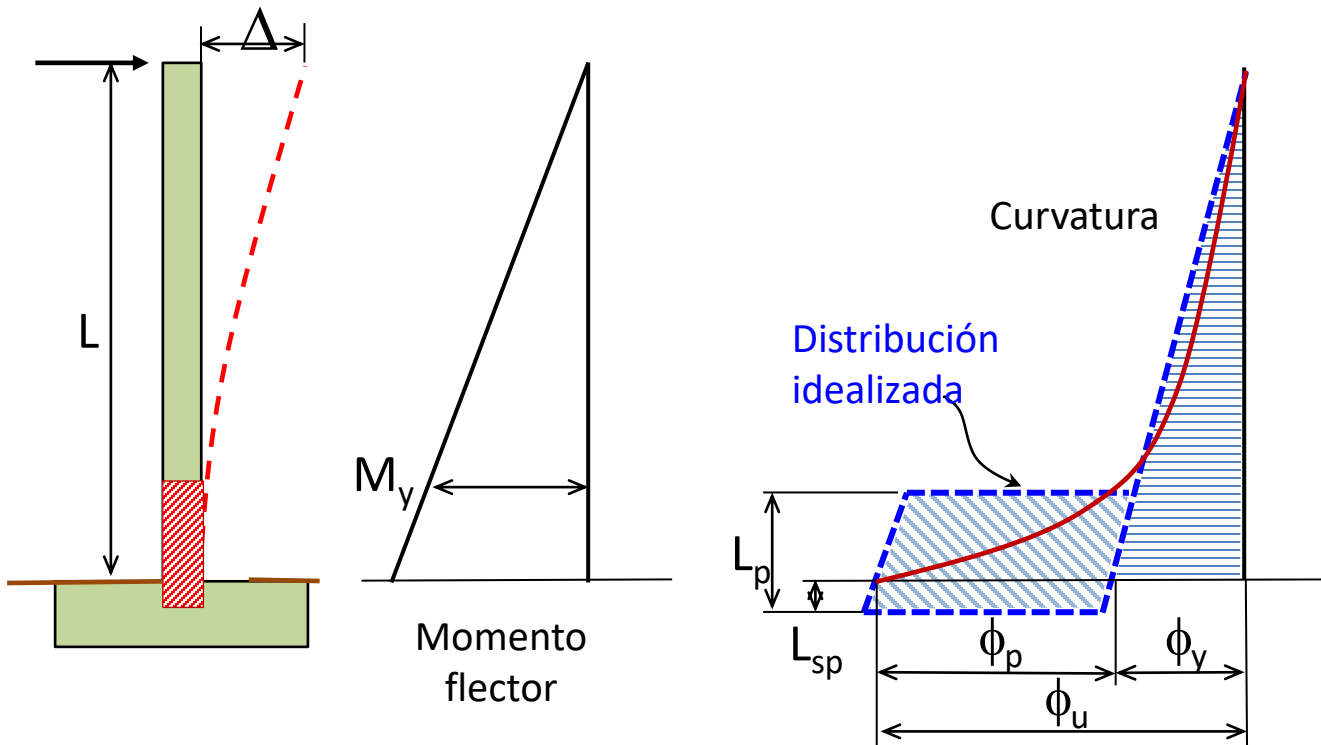
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\theta}{dx} = \phi = \frac{M}{EI} \quad \rightarrow \quad \theta = \int_0^L \phi \, dx$$

- Método aproximado a partir de la longitud de rótula plástica

Rótulas plásticas

Método aproximado a partir de la longitud de rótula plástica:

Momento-curvatura, $M-\phi$ → Momento-rotación, $M-\theta$



$$\theta_y = \frac{\phi_y L}{2}$$

$$\theta_p = (\phi_u - \phi_y) L_p$$

Rótulas plásticas

Método aproximado a partir de la longitud de rótula plástica:

Longitud de la rótula plástica, L_p :

- $L_p = k L_c + L_{sp} \geq 2 L_{sp} \quad (L_c = L)$

$$k = 0.2 \left(\frac{F_u}{F_y} - 1 \right) \leq 0.08$$

$$L_{sp} = 0.022 F_y d_{bl} \quad F_y \text{ in MPa, } d_{bl}: \text{diámetro del refuerzo longitudinal}$$

Priestley, Calvi & Kowalsky. Displacement-Based Seismic Design of Structures . IUSS Press, 2007

- $L_p \cong 0.5 h \quad h: \text{overall depth}$

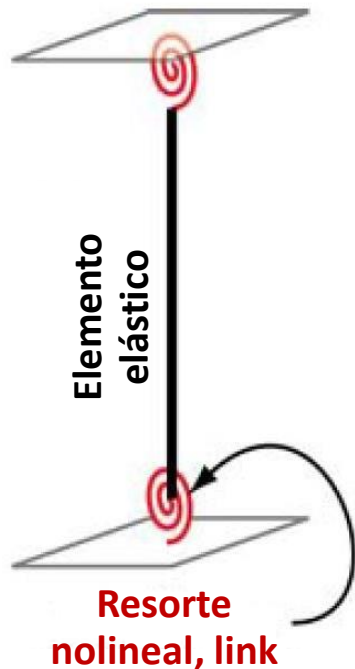
Paulay and Priestley

Modelos de plasticidad concentrada – Elementos de barra

Generalización del concepto de rótula para representar el comportamiento de la barra ante distintas sollicitaciones (“rótulas” según los 6 GdL).

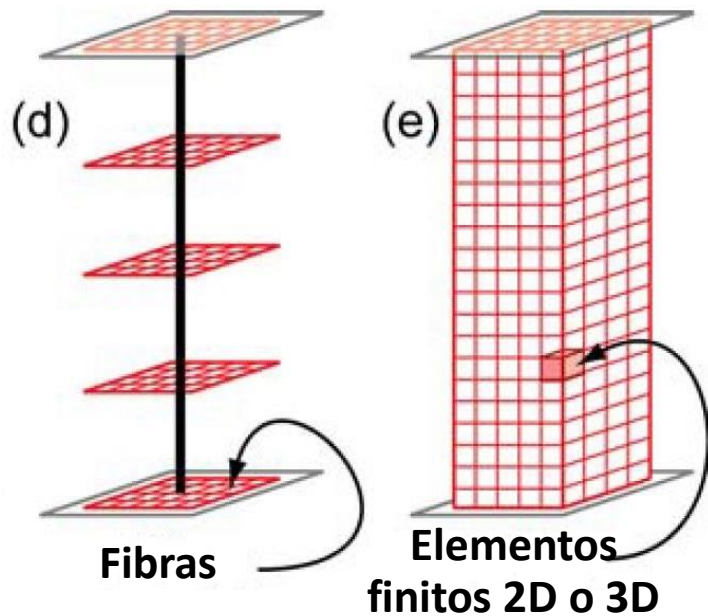
- Fuerza axial - Desplazamiento axial, $P-\delta$
- Corte - Distorsión, $V-\gamma$

Plasticidad concentrada –Elementos de barra

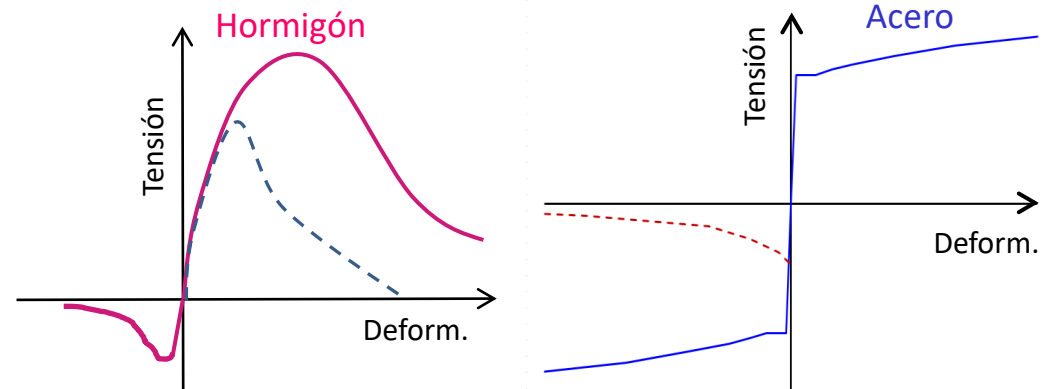


- Resortes no lineales de flexión, similar a la rótula plástica
- Generalización del concepto de rótula para representar el comportamiento de la barra ante distintas sollicitaciones.

Plasticidad distribuida. Modelación elementos de fibras, 2D o 3D



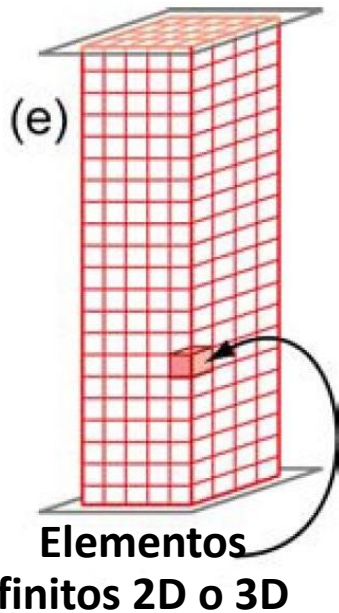
- Definición de las propiedades no lineales a nivel del material



- Definición de la geometría de la sección con elementos o fibras (mayor complejidad)

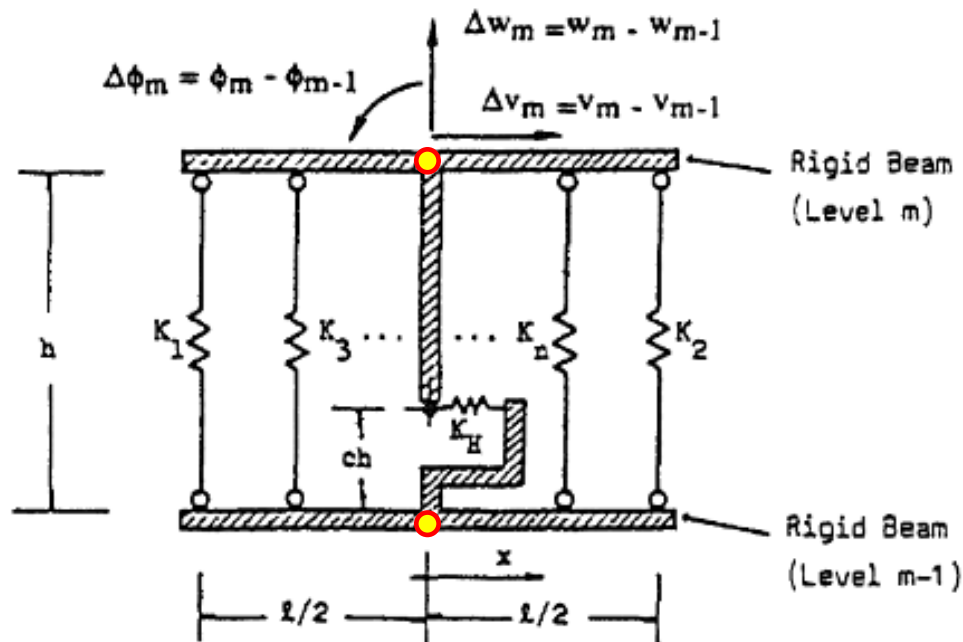
Plasticidad distribuida. Modelación elementos 2D o 3D

- Fisuración del hormigón:
 - *Smeared approach* (material continuo): el efecto de la fisuración se representa en forma distribuida en todo el elemento.
 - *Discrete approach*: hormigón + fisuras
- Gran complejidad para modelar materiales compuestos como el hormigón armado:
 - *Smeared approach* (continuum material models): el material compuesto se representa como homogéneo y las armaduras se representa en forma distribuida
 - *Explicit approach*: hormigón + barras acero (elementos 1D): nodos compartidos (shared nodes) o constrains.
 - Material no lineal homogenizado: método aproximado en el que se modela solo el hormigón propiedades ficticias para representar el Ho Ao.



Macro elementos

Los macro elementos combinan distintos componentes (como barras y resortes) y se formulan en los programas de computación como un único elemento de dos o más nodos. De esta forma se facilita al usuario la implementación del modelo y la carga de datos.

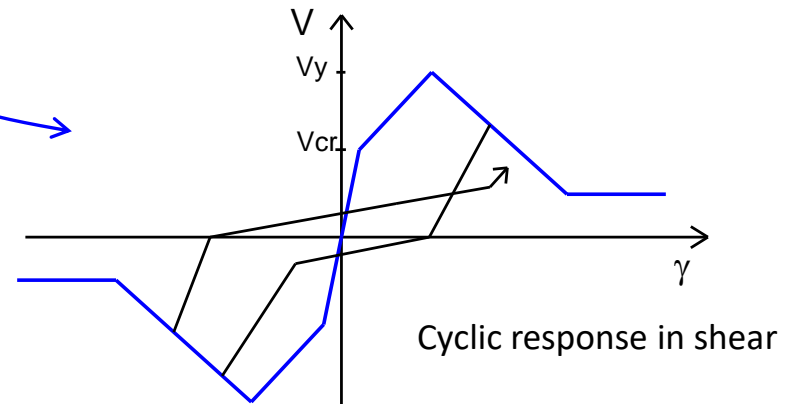
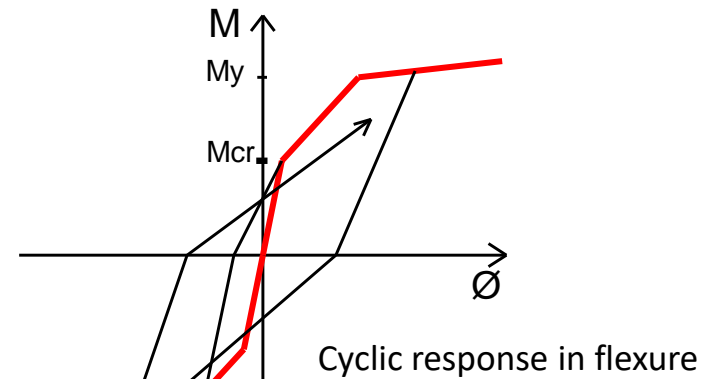
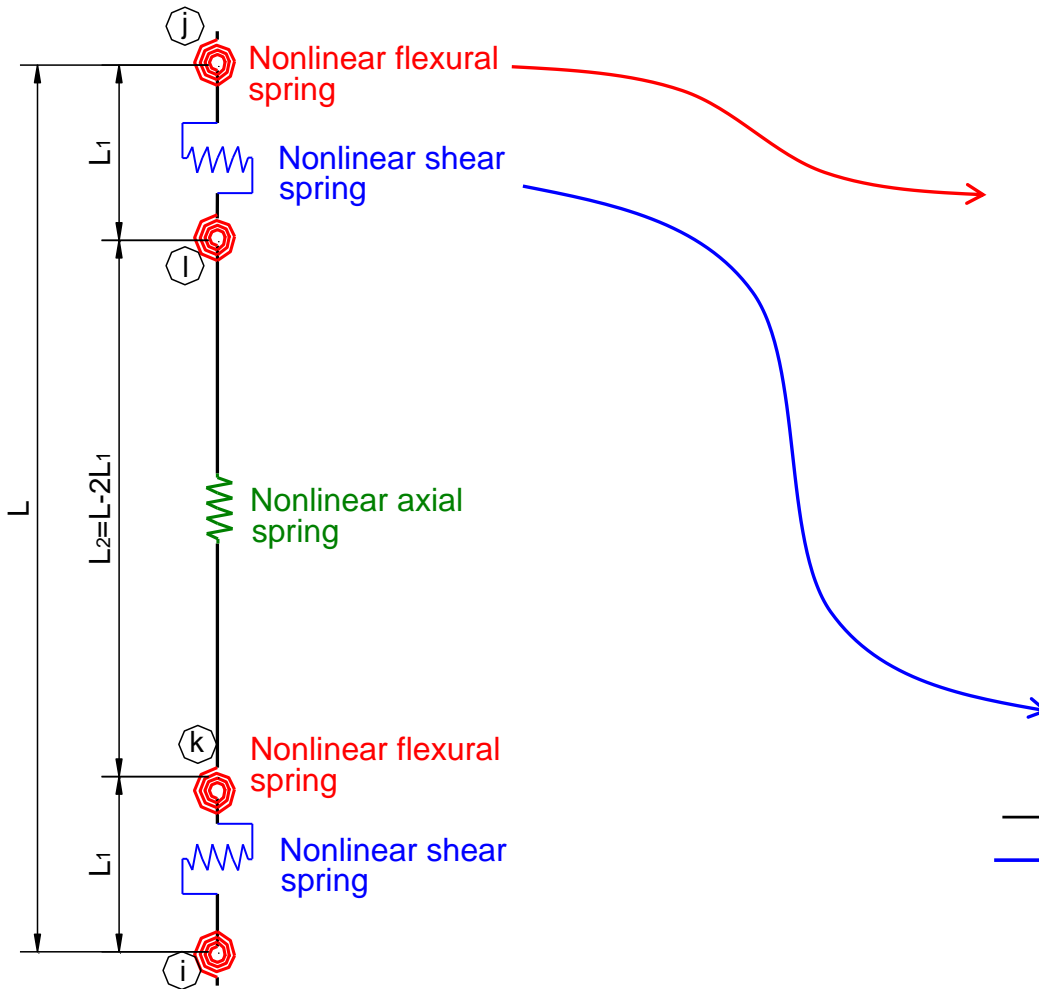


Ejemplo de un macro modelo para tabiques de Ho Ao, con dos nodos externos y múltiples nodos internos. Este macro elemento permite considerar el comportamiento no lineal por flexión, axial y corte.

Fig. 2 - Multi-component-in-parallel model (Vulcano & al. 1988).

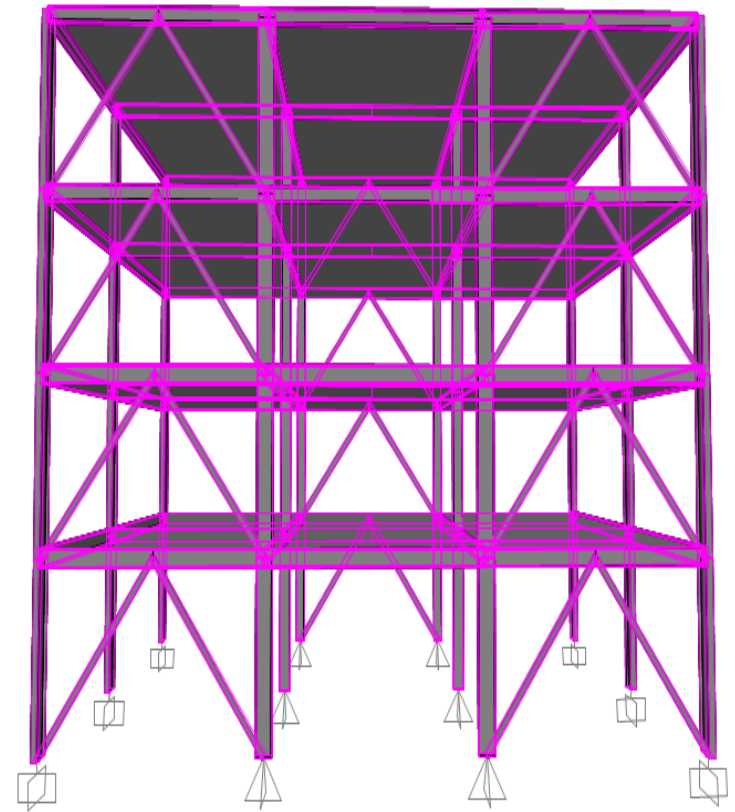
Macro elementos

Ejemplo: macro elemento para columnas, 4 nodos, 12 GDL (Torrissi, G)



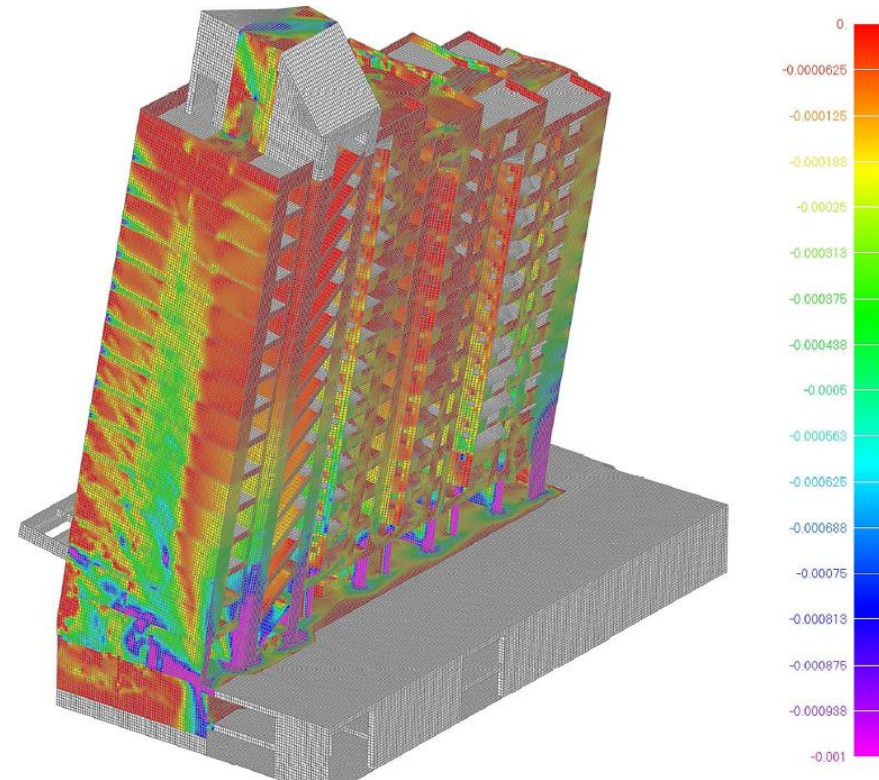
Modelos de barra o con macro-elementos

- Modelos más simples y con menos grados de libertad
- Menor costo computacional → análisis de edificios y estructuras con muchos miembros
- Definición de las propiedades no lineales a nivel de los miembros.
- En los modelos de plasticidad concentrada, debe asumirse previamente la posición de las rótulas plásticas o resortes no lineales.



Modelos refinados con elementos 2D o 3D

- Modelación detallada del problema.
- Mayor dificultad en la implementación del modelo.
- Gran precisión (si el modelo se implementa adecuadamente).
- Alto costo computacional.
- Mayor complejidad en el análisis de resultados.



Modelo del edificio Alto Rio, Chile, para investigar el colapso ocurrido durante el terremoto de 2010.

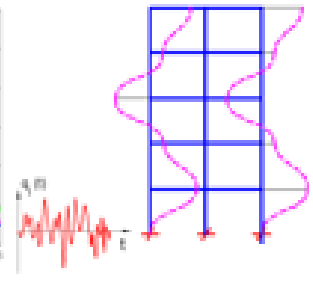
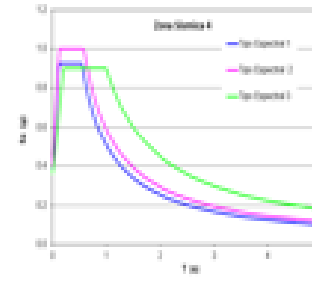
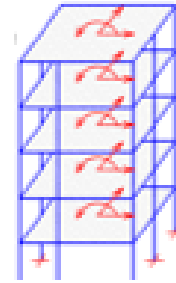
Selección del modelo más conveniente

Se encuentra disponibles una amplia variedad de elementos para modelar estructuras en rango no lineal.

Estos modelos presentan ventajas y limitaciones que el ingeniero estructural debe conocer para realizar una adecuada selección.

La mejor alternativa no es necesariamente el modelo más complejo y refinado que se pueda implementar. En cada caso, según sean los objetivos y recursos disponibles, debe considerarse cuál es modelo más adecuado.

Ingeniería Sismorresistente



Procedimientos de análisis no lineal

Procedimientos de análisis no lineal

Modelación. Tipos de elementos

- Resortes
- Elementos de barra (1D) o Elementos 2D y 3D.
- Macro elementos (con varios componentes)

Procedimientos de análisis

- **Análisis plástico**
- **Análisis estático**
- **Análisis dinámico**

Procedimientos de análisis no lineal (más usuales)

- **Análisis plástico:** basado en los dos teoremas de Druker et al, 1952. Actualmente se aplica a casos simples o para explicaciones conceptuales.
- **Estático incremental, *pushover* o colapso incremental:** es un procedimiento donde se realizan sucesivos análisis lineales, incrementando la carga (con un patrón fijo) hasta alcanzar ciertos valores establecidos como parámetros de control.
- **Análisis dinámico no lineal:** se resuelven numéricamente las ecuaciones diferenciales de equilibrio dinámico, modificando la matriz de rigidez. Su aplicación se ha incrementado, y actualmente es requerido en casos de aislamiento sísmico, disipadores, rehabilitación sísmica, edificios de gran altura.

Análisis plástico

Método del mecanismo (basado en el teorema del límite superior)

El método es general y se puede aplicar a cualquier tipo de estructura, preferentemente a pórticos

Se consideran tres hipótesis

- Condición de equilibrio entre solicitaciones y cargas actuantes.
- Condición de plasticidad: $M \leq M_p$ (momento de plastificación)
- Condición de mecanismo: los momentos flectores originan que la estructura, o parte de ella, forme un mecanismo plástico (también llamado de colapso)
→ **rótulas plásticas**

Este procedimiento se fundamenta en el siguiente teorema:

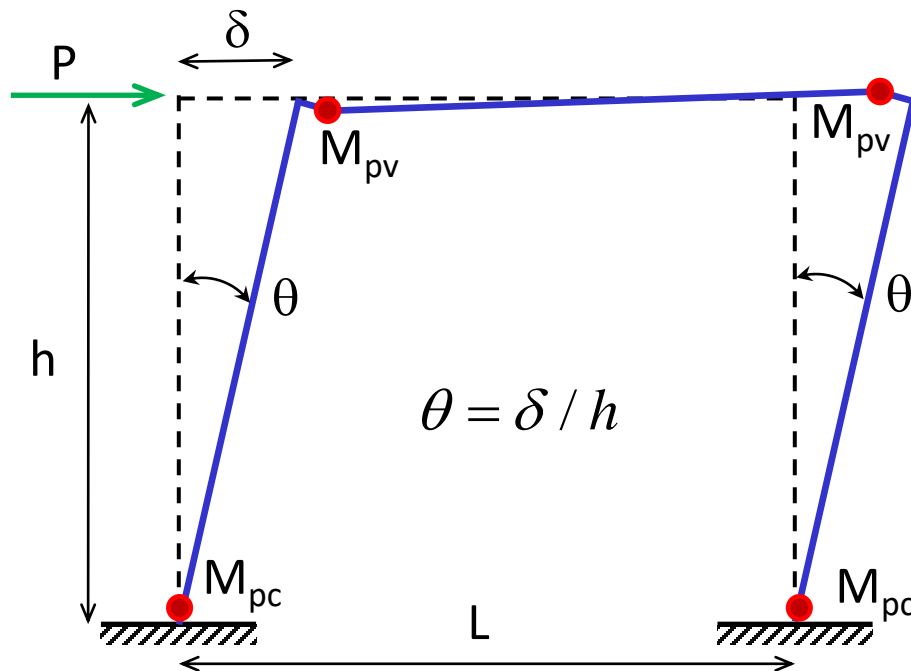
Teorema del límite superior: La carga calculada en base a un mecanismo plástico dado será siempre mayor o igual a la carga límite o carga de colapso.

Análisis plástico

Método del mecanismo (basado en el teorema del límite superior)

El desarrollo se realiza aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales:

$$\sum P_i \delta_i = \sum M_{pj} \theta_j$$



Para este ejemplo:

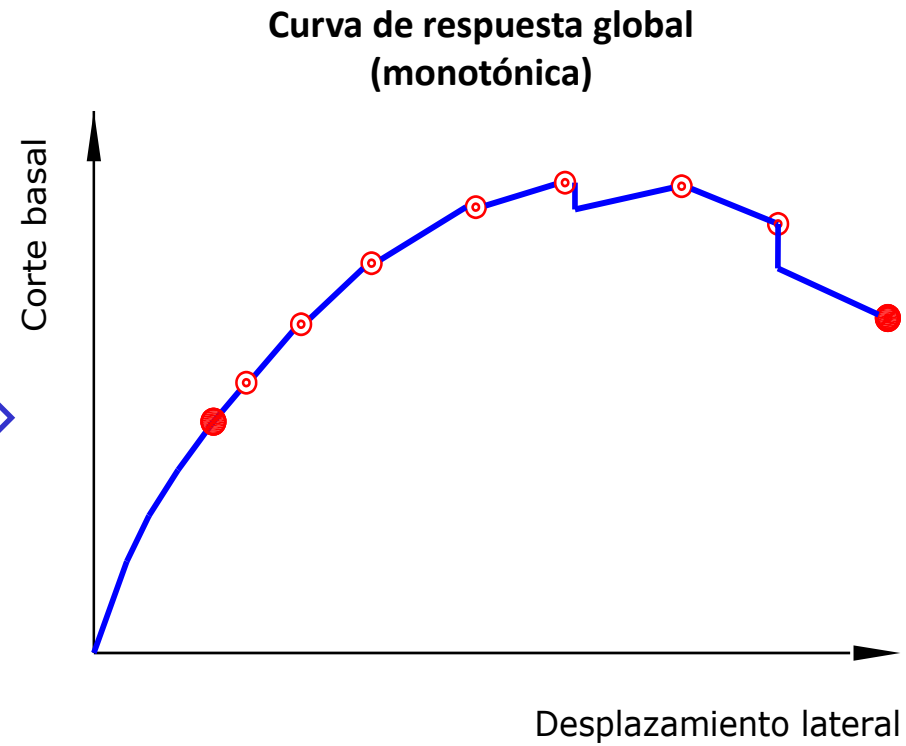
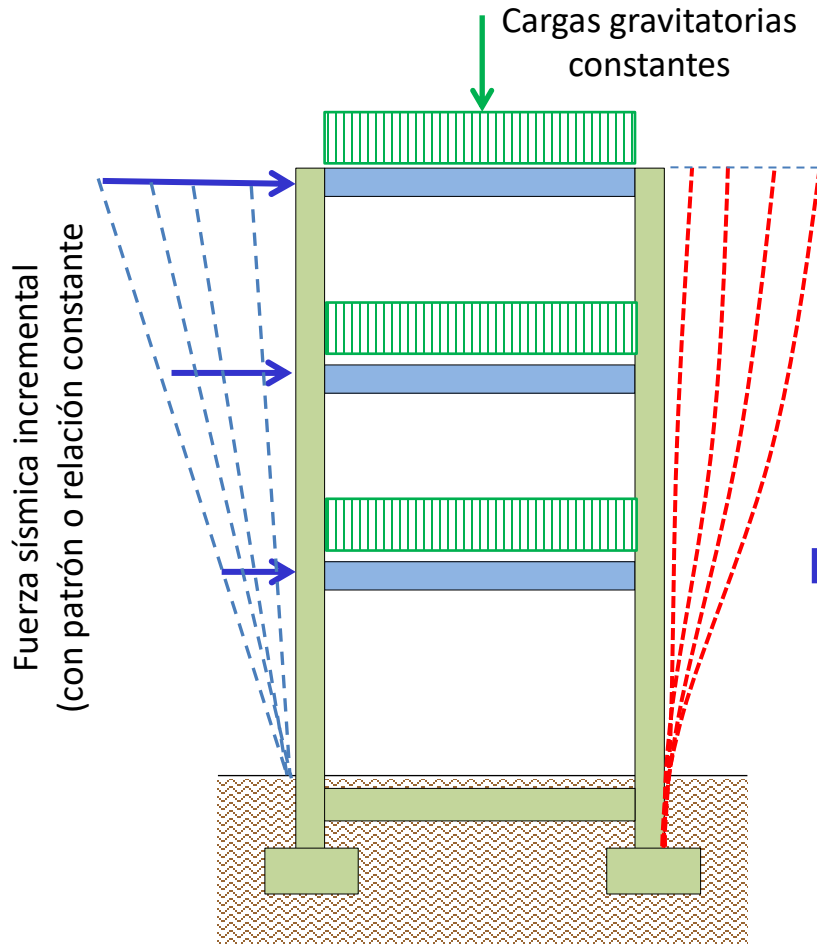
$$P\delta = 2(M_{pv} + M_{pc})\theta$$

$$P\delta = 2(M_{pv} + M_{pc})\delta / h$$

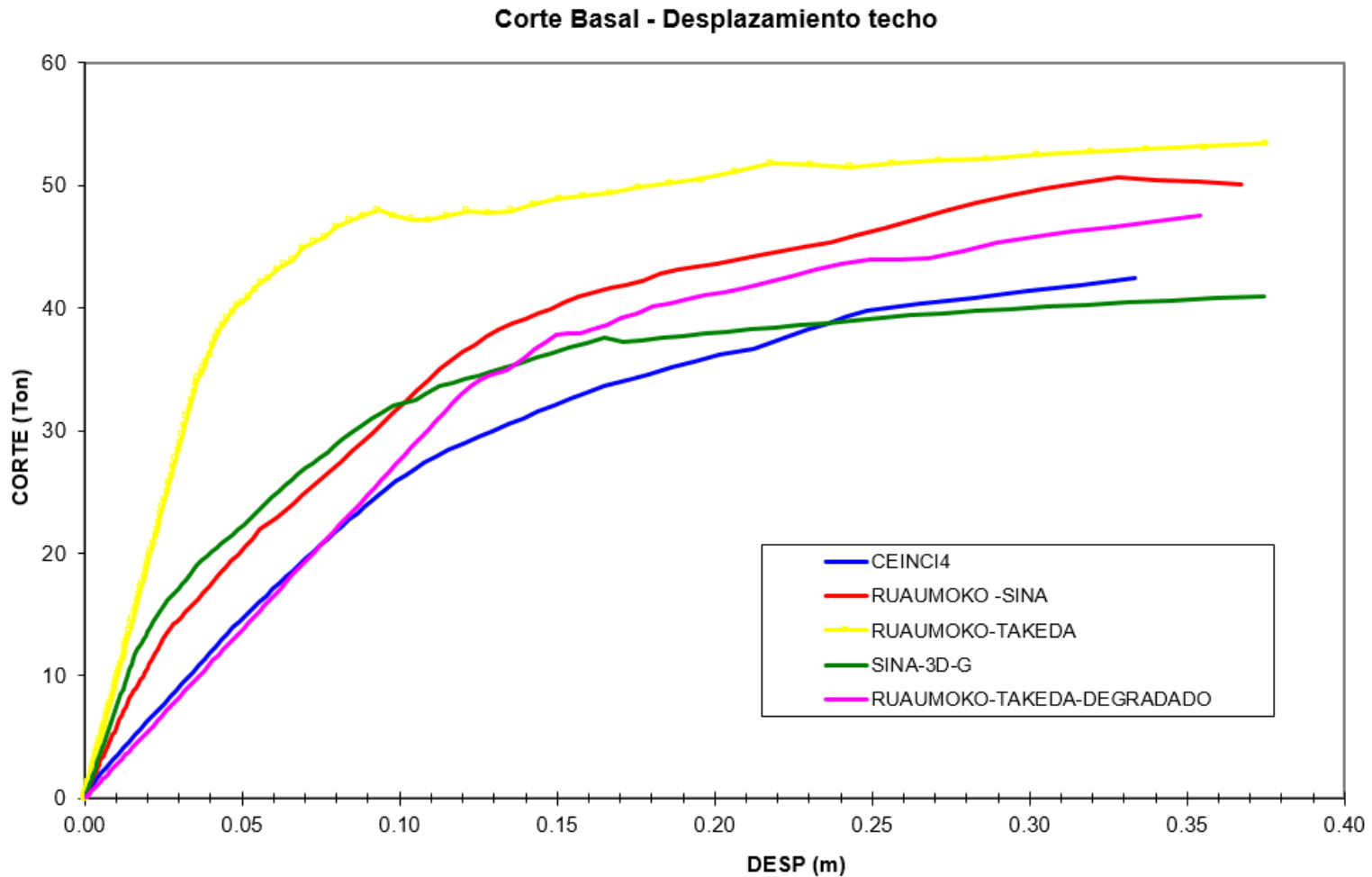
De modo que la carga límite que origina el mecanismo plástico es:

$$P = \frac{2}{h}(M_{pv} + M_{pc})$$

Análisis no lineal estático



Análisis no lineal estático. Ejemplo



Se observan diferencias significativas, según el programa y el tipo de modelo usado.

Análisis no lineal estático

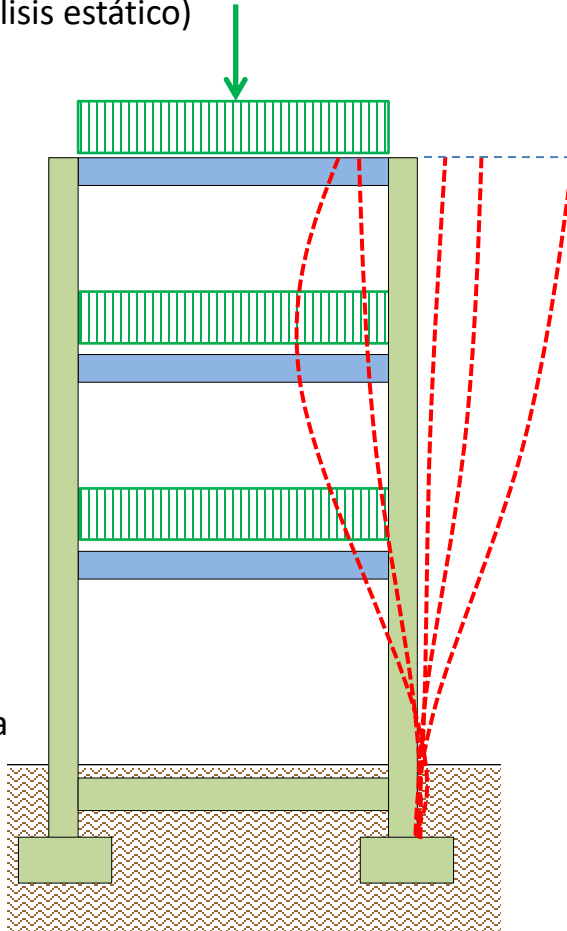
- El análisis no lineal estático es más complejo → la respuesta es muy susceptible a las propiedades no lineales del modelo.
- Se asume que el patrón de carga es constante. Esto representa un error grave en el análisis sísmico, debido a que las fuerzas equivalentes varían a medida que la estructura modifica sus propiedades (rigidez).

Para corregir este problema se ha desarrollado el método “adaptive pushover” que modifica el patrón de carga sísmica considerando los modos de vibración de cada paso (los cuales cambian a medida que varía la rigidez de la estructura).

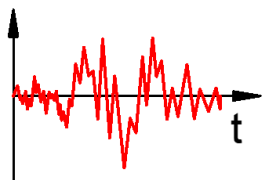
- Este procedimiento no permite capturar los efectos producidos por los modos altos en la respuesta no lineal. Estos efectos pueden ser muy importantes en ciertos casos, por ejemplos, tabiques de Ho Ao.
- La predicción de la resistencia de la estructura es, en general, adecuada (**si se modela bien la estructura**), pero es más difícil predecir la capacidad de desplazamientos real (no se consideran los efectos de la acción dinámica).

Análisis no lineal dinámico

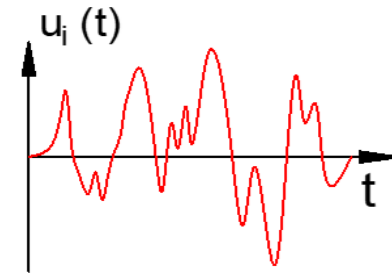
Cargas gravitatorias constantes
(análisis estático)



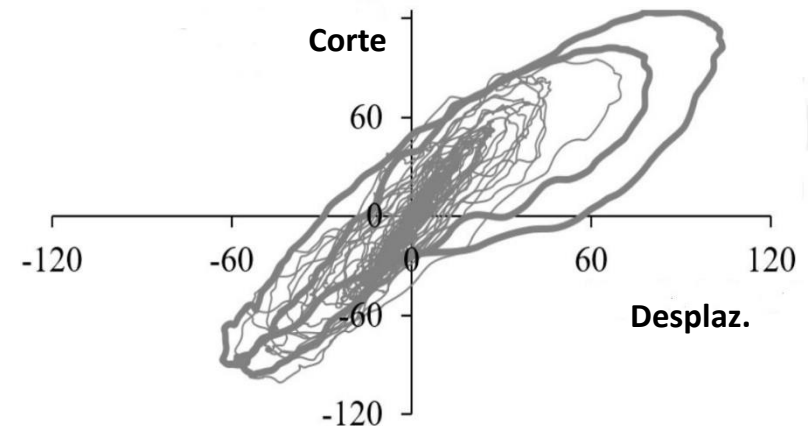
Acción sísmica
→ acelerograma



Todos los parámetros de
respuesta varían en el tiempo



Curva de respuesta global



Análisis no lineal dinámico

- El análisis no lineal dinámico se emplea como herramienta de verificación, en investigación y también para el diseño sismorresistente de estructuras.
- El modelo debe considerar adecuadamente el amortiguamiento del sistema.
- El análisis se debe realizar con un grupo de acelerogramas.
- La definición de las propiedades no lineales de las rótulas o de los materiales debe incluir reglas de histéresis.

*Histéresis es la dependencia del estado de un sistema de su historia (estados previos).
Ejemplo: El valor de la fuerza depende del desplazamiento y de la historia previa de los desplazamientos.*

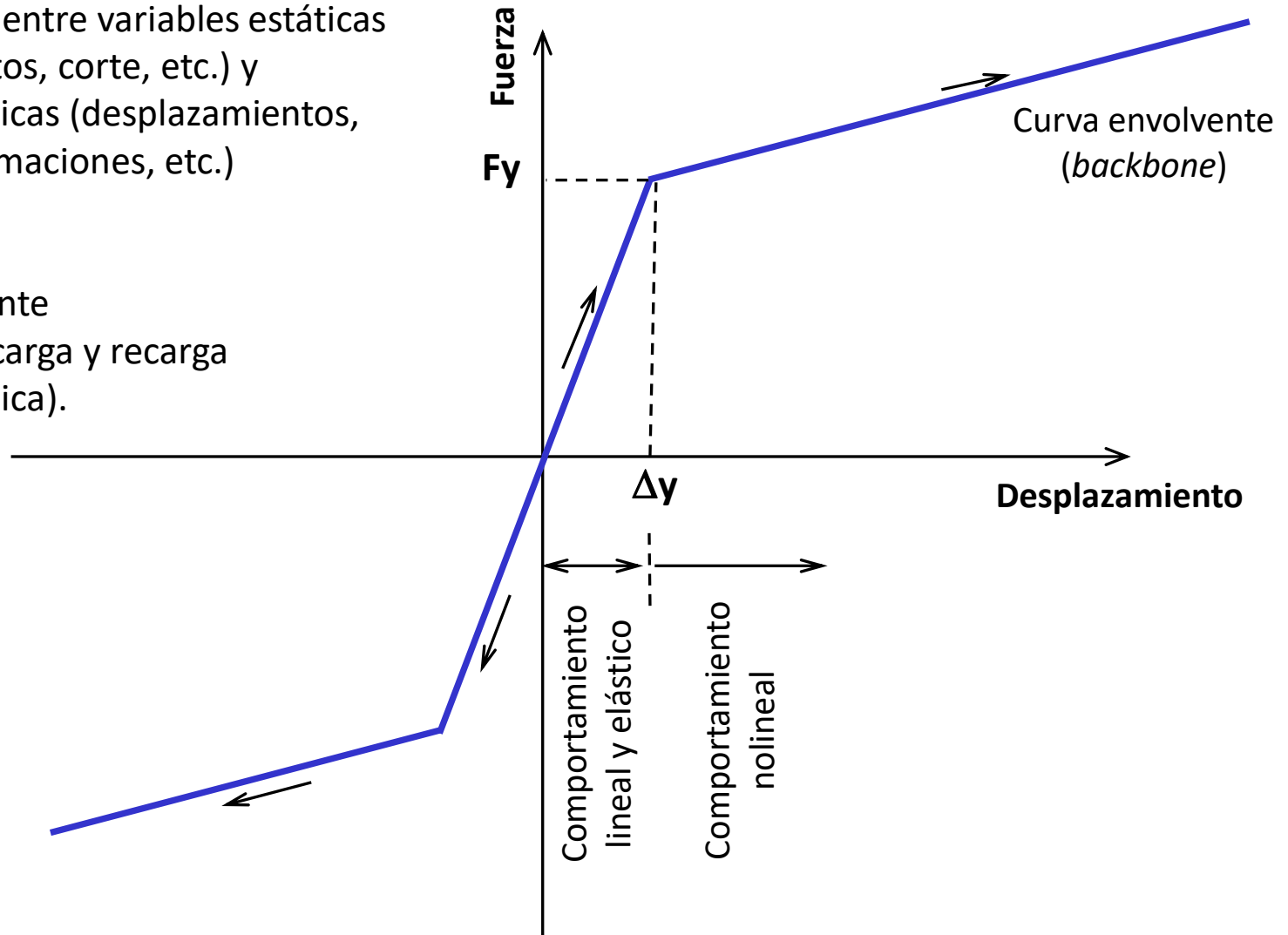
- La evaluación e interpretación de resultados es compleja.
- Este tipo de análisis es, teóricamente, el procedimiento más preciso.

Modelos histéricos

Los modelos de histéresis definen la relación no lineal entre variables estáticas (fuerzas, momentos, corte, etc.) y variables cinemáticas (desplazamientos, rotaciones, deformaciones, etc.)

Se debe definir:

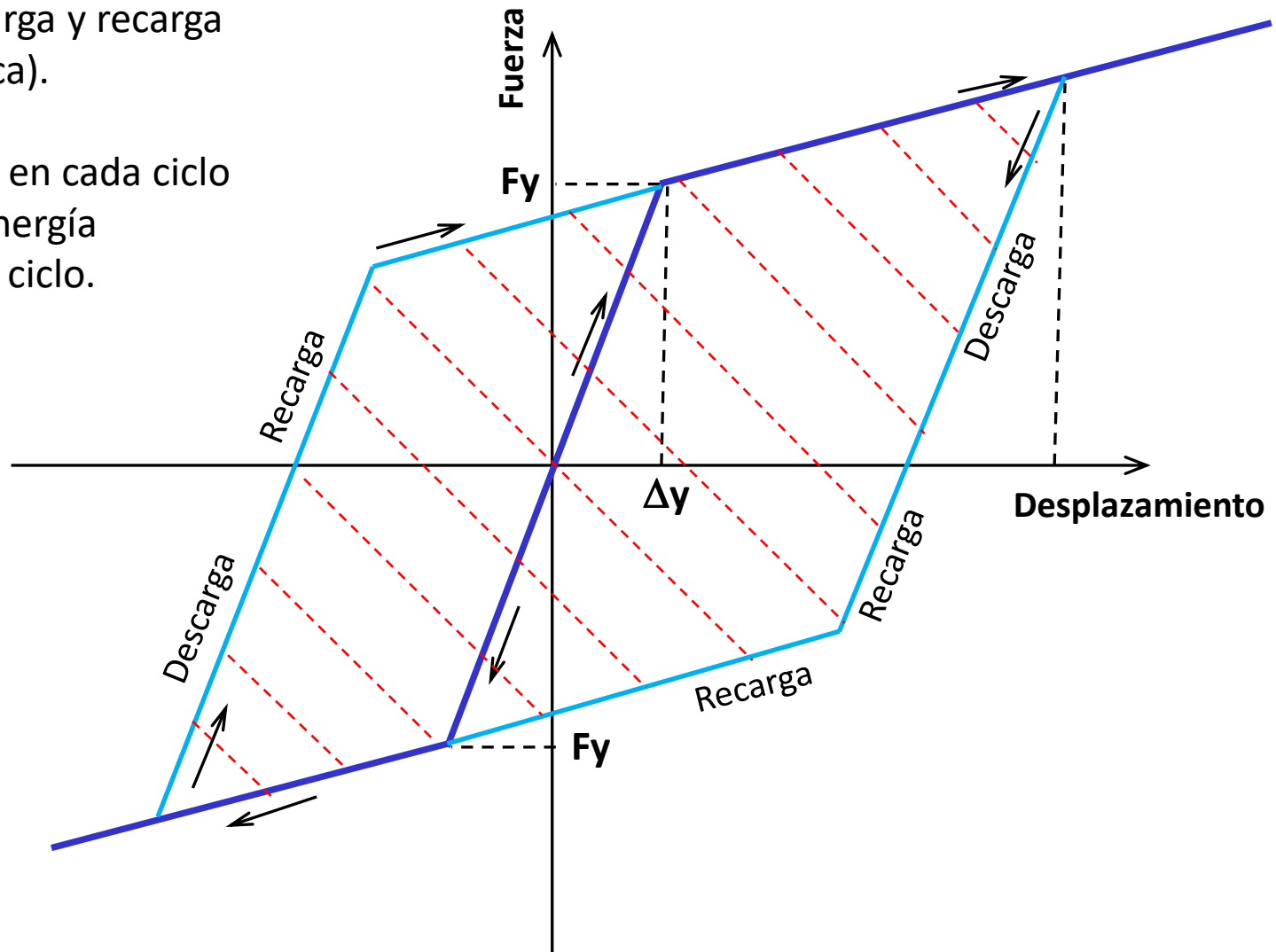
- Curva envolvente
- Reglas de descarga y recarga (respuesta cíclica).



Modelos histeréticos

Reglas de descarga y recarga
(respuesta cíclica).

El área definida en cada ciclo
representa la energía
disipada en ese ciclo.



Ejemplos de modelos histeréticos

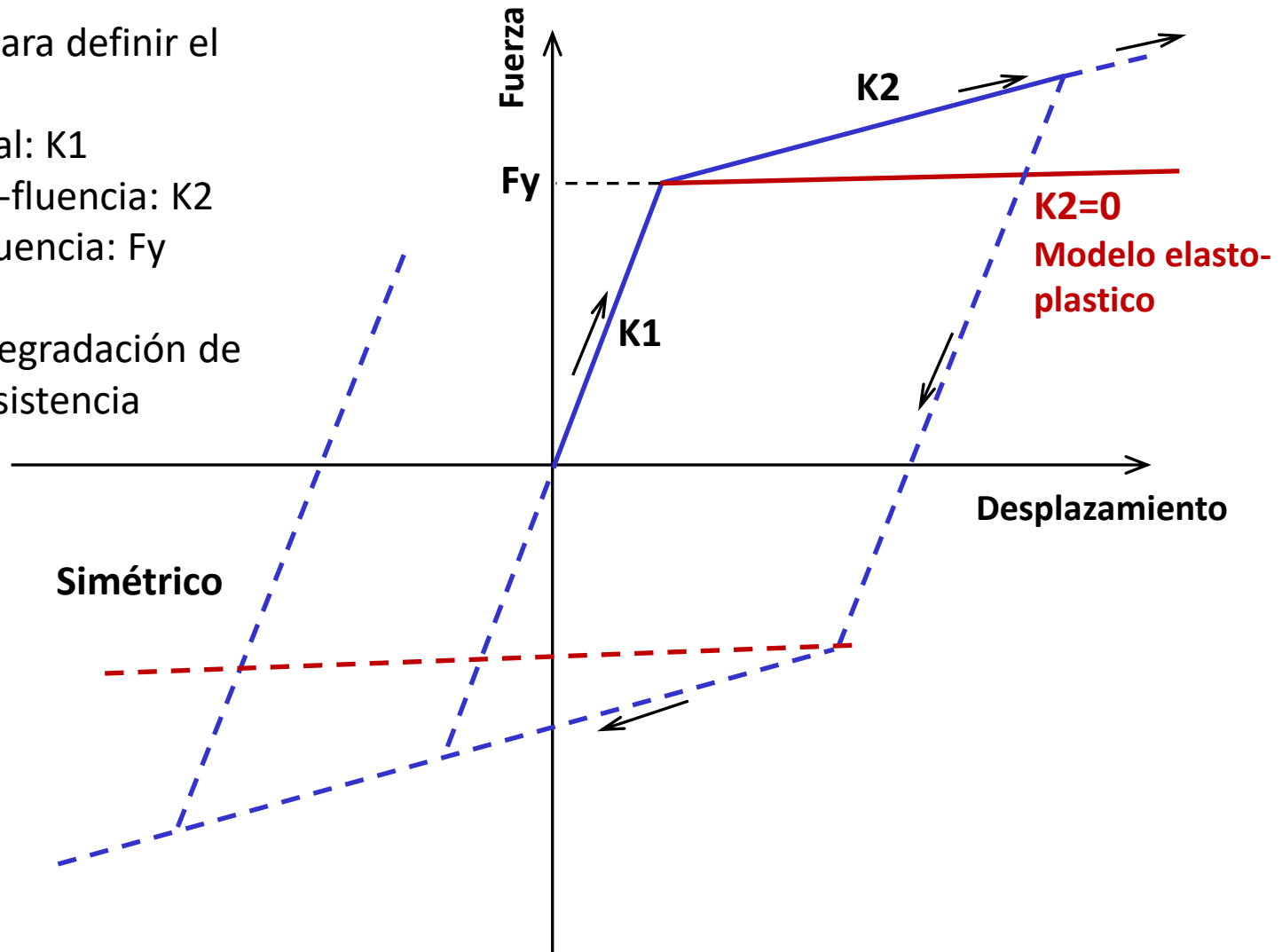
Modelo bilineal y elasto-plástico.

Programa NONLIN: Simple Bilinear

3 parámetros para definir el modelo:

- Rigidez inicial: K_1
- Rigidez post-fluencia: K_2
- Fuerza de fluencia: F_y

No considera degradación de rigidez ni de resistencia



Ejemplos de modelos histeréticos

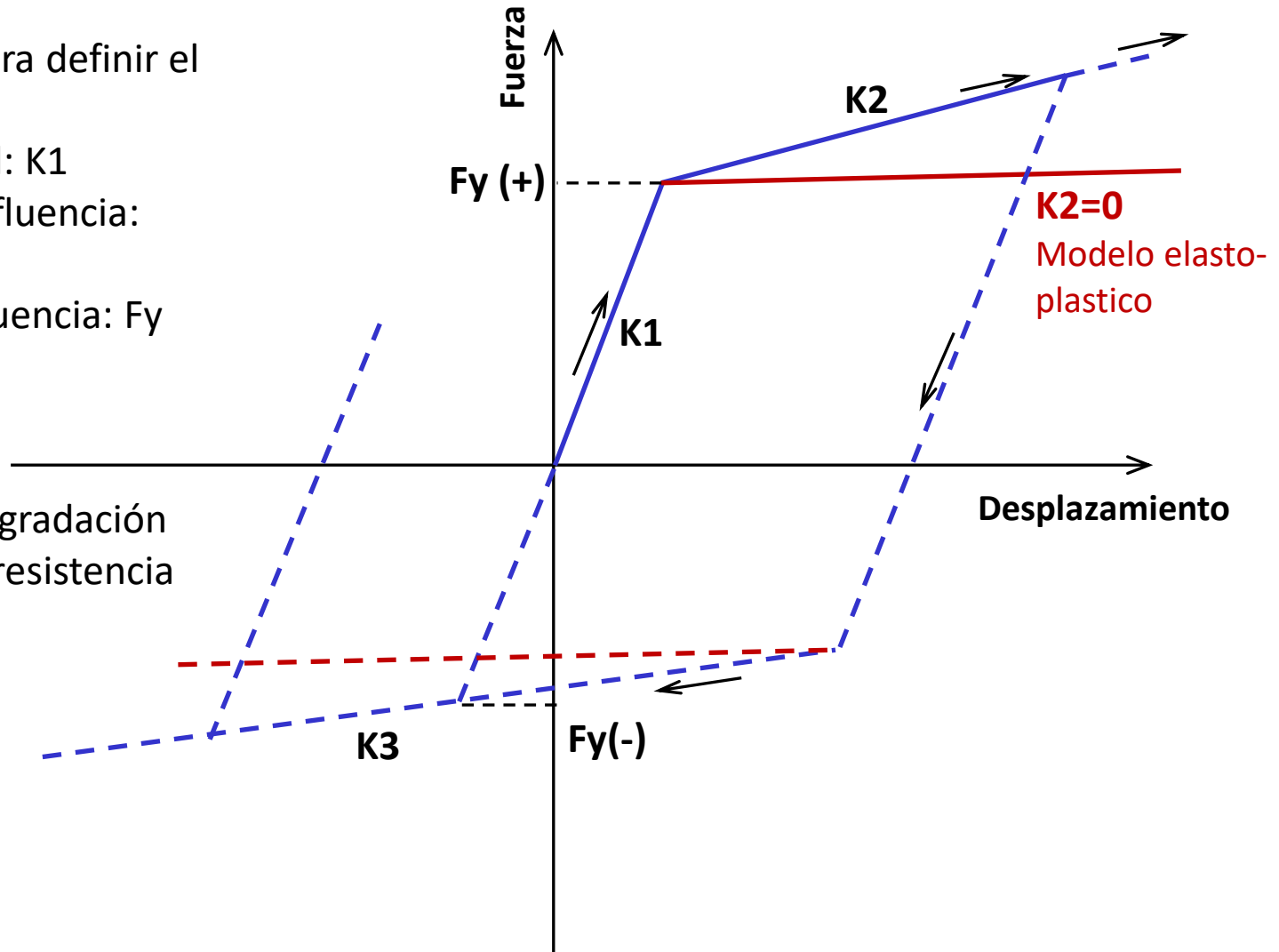
Modelo bilineal asimétrico

Programa NONLIN: Non Degrading

5 parámetros para definir el modelo:

- Rigidez inicial: $K1$
- Rigidez post-fluencia: $K2(+)$ y $K3(-)$.
- Fuerzas de fluencia: $Fy(+)$ y $Fy(-)$

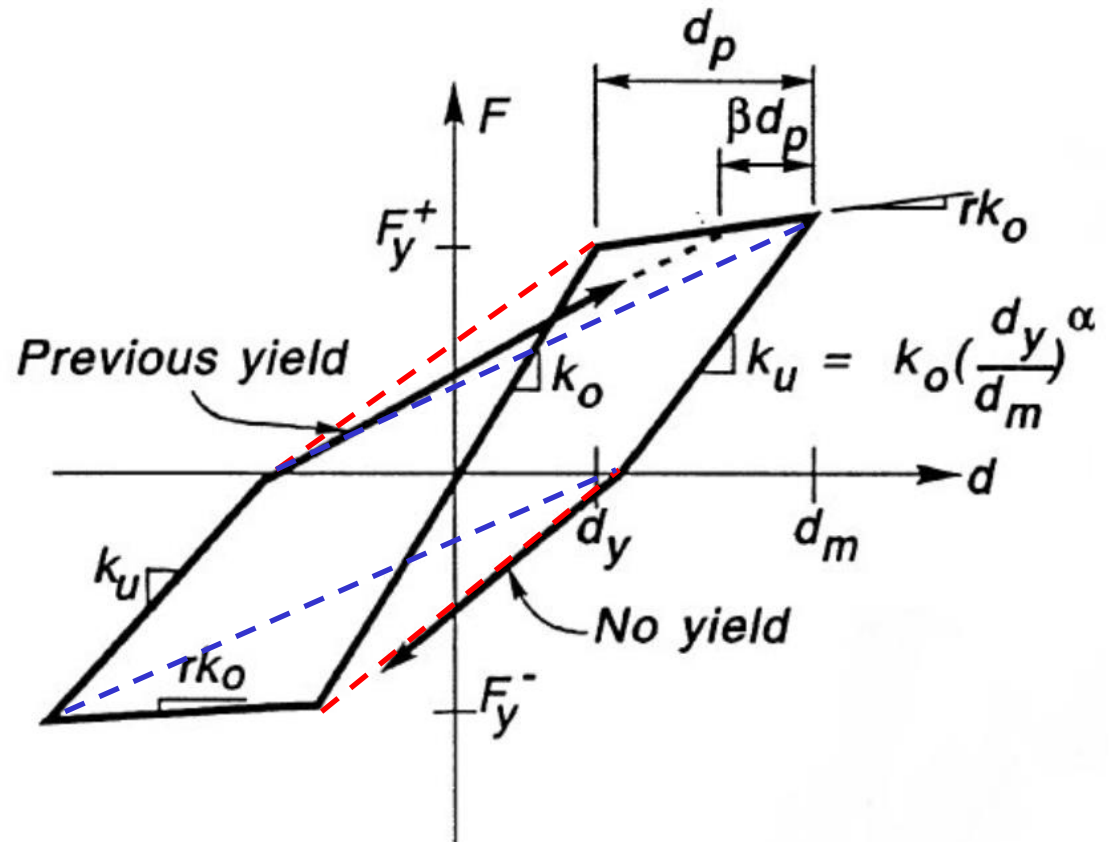
No considera degradación de rigidez ni de resistencia



Modelo de Takeda modificado

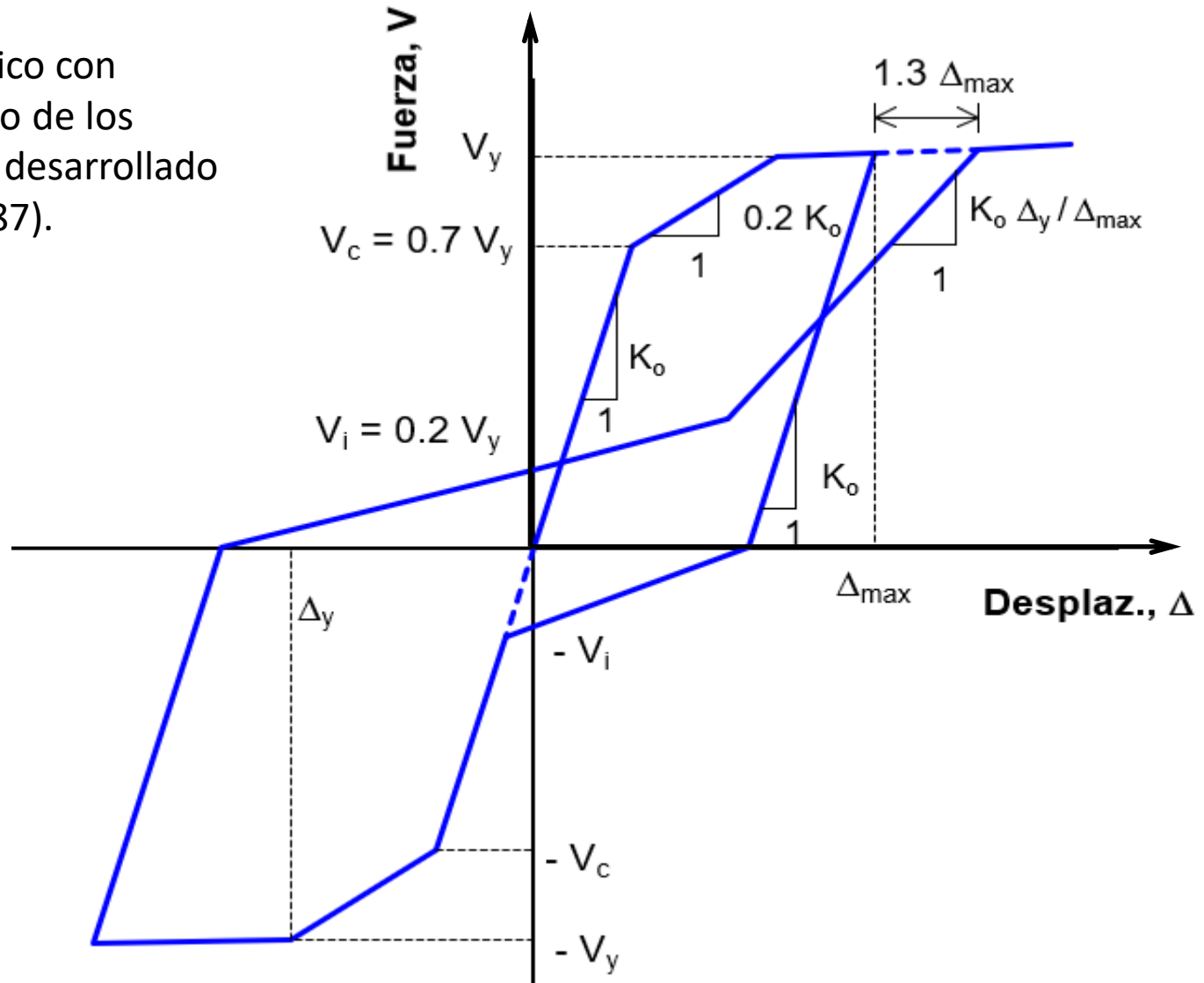
Parámetros para definir el modelo:

- Rigidez inicial: k_0
- Rigidez post-fluencia: $r k_0$
- Fuerzas de fluencia: F_y^+ y F_y^-
- Factor de degradación de rigidez en la descarga: α
- Factor de recarga: β

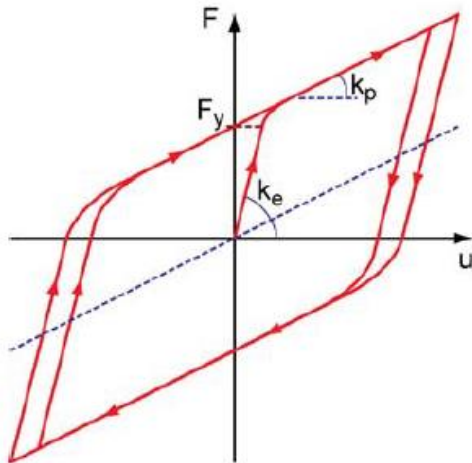


Ejemplos de modelos hysteréticos

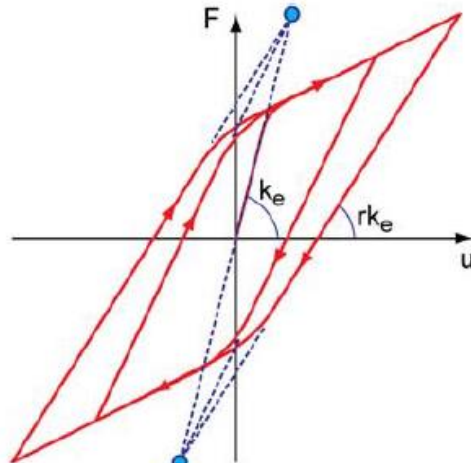
Modelo hysterético con estrangulamiento de los ciclos (*pinching*) desarrollado por Stewart (1987).



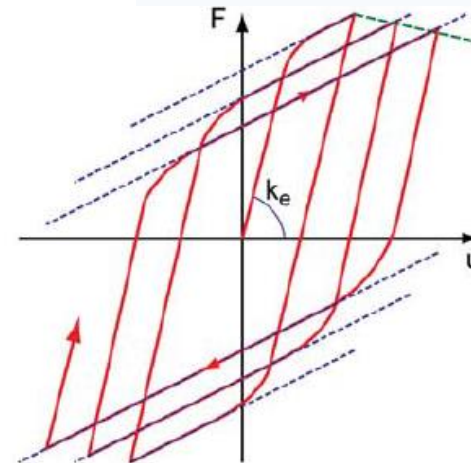
Ejemplos de modelos histeréticos



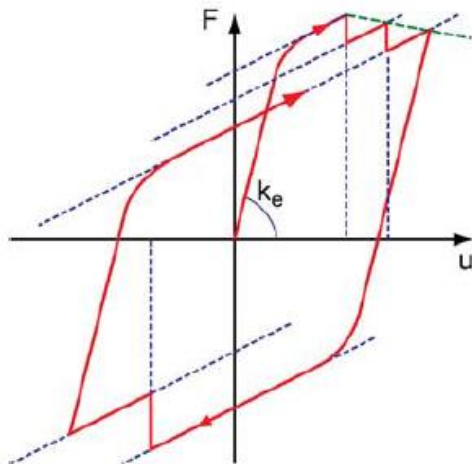
(a) Hysteretic model without deterioration



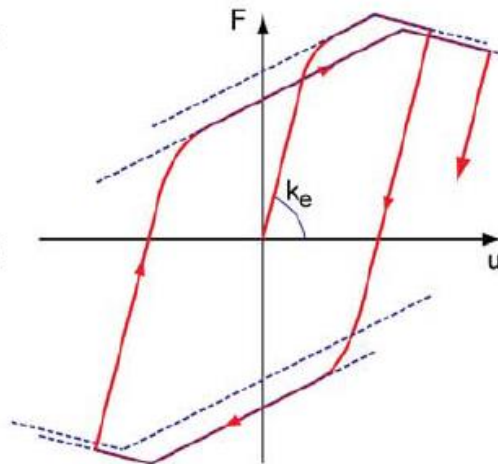
(b) Model with stiffness degradation



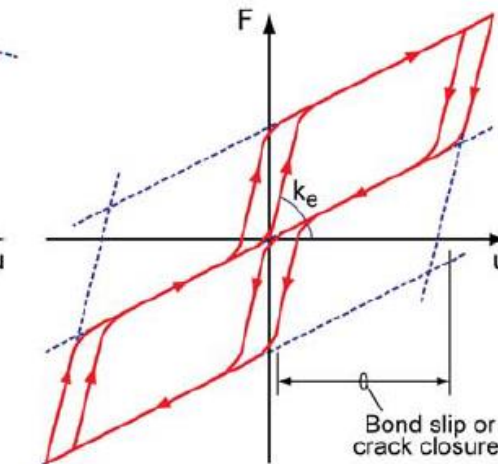
(c) Model with cyclic strength degradation



(d) Model with fracture strength degradation



(e) Model with post-capping gradual strength deterioration



(f) Model with bond slip or crack closure (pinching)

Relación entre el tipo de procedimiento, el modelo y la definición de las propiedades no lineales.

Procedimiento	Modelo	Propiedad no lineales	
Método estático (pushover)	Plasticidad concentrada Elem. de barra o macromodelos	Relaciones fuerza- desplazamiento para las rótulas o resortes	Monotónicas
	Plasticidad distribuida Elem. de fibra, 2D o 3D	Relaciones tensión-deformación para los materiales	
Método dinámico	Plasticidad concentrada Elem. de barra o macromodelos	Relaciones fuerza- desplazamiento para las rótulas o resortes	Histeréticas
	Plasticidad distribuida Elem. de fibra, 2D o 3D	Relaciones tensión-deformación para los materiales	

Procedimientos para el análisis de estructuras ante acciones sísmicas

Tipo de procedimiento		Comportamiento de la estructura	
		Lineal y elástico	Nolineal
Estático		Método estático equivalente o de fuerzas laterales equivalentes	Análisis estático incremental (<i>pushover</i>)
Dinámico	Análisis modal	Análisis modal espectral	No aplicable
		Integración directa → Análisis dinámico lineal.	No aplicable Superposición modal nolineal*
	Integración directa	Análisis dinámico lineal	Análisis dinámico nolineal Análisis dinámico incremental (IDA)

*Mohraz et al., 1992. Método aproximado aplicable a casos de amortiguamiento no clásico y sistemas nolineales (como aislamiento sísmico).