UNCUYO
UNIVERSIDAD
NACIONAL DE CUYO

FACULTAD
DE INGENIERÍA

Universidad Nacional de Cuyo – Facultad de Ingeniería

INGENERIA SISMORRESISTENTE

Matrices de Masa y Rigidez en edificios de varios pisos. Ejemplo de aplicación

Dr. Ing. Gonzalo Torrisi

Profesor Adjunto.

MATRICES DE MASA Y RIGIDEZ EN EDIFICIOS DE VARIOS PISOS

1. EJEMPLO DE APLICACIÓN

El análisis dinámico es requerido por los reglamentos en diversas ocasiones, por ejemplo, para sistemas complejos o de varios niveles o para construcciones que cumplen funciones esenciales o tienen gran importancia pública. Si bien este análisis usualmente se realiza con un software donde se modela la estructura en forma completa y se obtienen las fuerzas de diseño o directamente las solicitaciones y desplazamientos, es importante el comprender los pasos necesarios para realizarlo, especialmente el armado de matrices y la interpretación de resultados.

En el ejemplo vamos a analizar un edificio de dos niveles, cuya planta típica se muestra en la Figura 1. A partir de este ejemplo, vamos a calcular las matrices de rigidez, [k], y de masas, [m], para distintos casos.

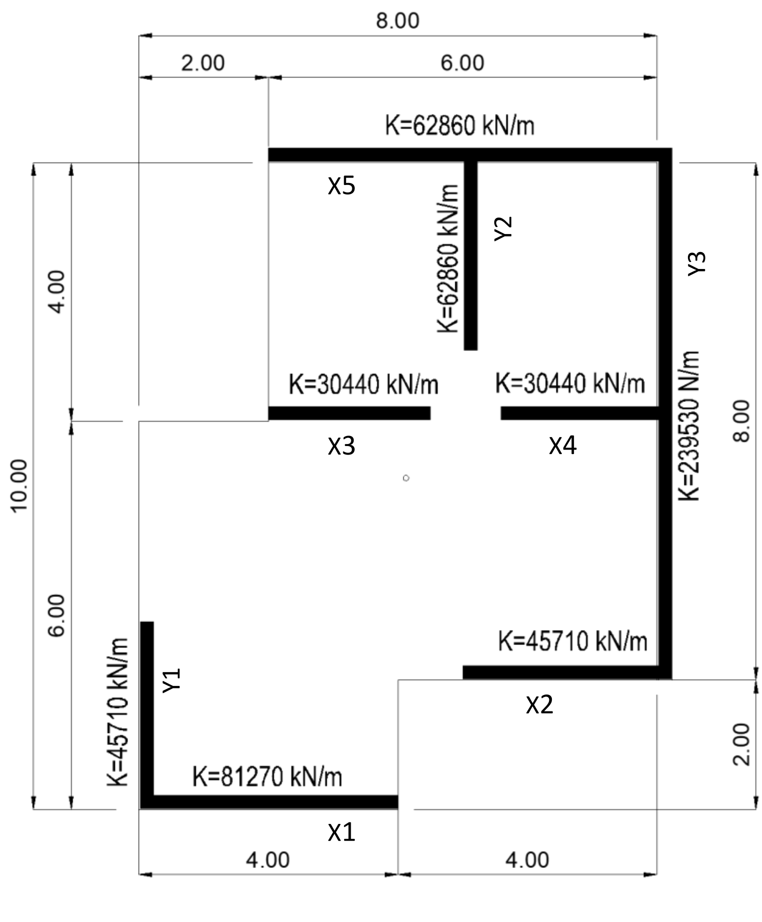

Figura 1. Planta en estudio.

Para comenzar, debemos definir los grados de libertad dinámicos del modelo. Vamos a considerar que es válida la hipótesis de diafragma rígido, esto es que las losas de cada nivel son indeformables en su plano. Esta hipótesis nos permite reducir el número de grados de libertad del modelo, dado que podemos definir 3 GDL por nivel: dos traslaciones horizontales, u_x y u_y (según los ejes X e Y) y una rotación u_θ (alrededor de Z). En total 6 GDL, para este ejemplo de 2 pisos.

El ejercicio será resuelto siguiendo dos criterios diferentes para armar las matrices de rigidez y masa, variando en cada uno de los casos la forma en que ordenamos el vector de desplazamientos dinámicos:

a) Caso 1: el vector se ordena por piso y luego por dirección o tipo de desplazamiento

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{\theta 1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{\theta 2} \end{Bmatrix}$$

b) Caso 2: el vector se ordena por dirección y tipo de desplazamiento.

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{y1} \\ u_{y2} \\ u_{\theta 1} \\ u_{\theta 2} \end{Bmatrix}$$

2. CALCULO DE [k] y [m] RESPECTO DEL CENTRO DE MASAS

2.1 Cálculo de la matriz de rigidez [k]

Se supone que el nivel 1 y el nivel 2 son iguales por simpleza. Las matrices de rigidez de cada uno de los elementos se detallan a continuación. Estas matrices se pueden calcular por procedimientos clásicos del análisis estructural, en forma simplificada, para los valores de rigidez de piso dados en la planta, esta matriz tiene la siguiente forma:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

Siendo k, la rigidez de piso como dato en la planta.

Se ha considerado como hipótesis que los tabiques están aislados y no forman figuras tales como T o L. Si bien hay que considerar este comportamiento real, en este ejemplo se han considerado como tabiques aislados desvinculados de los demás como simplificación.

Para los elementos de la planta.

Elemento X1	Ke=	162540	-81270
		-81270	81270
Elemento X2	Ke=	91420	-45710
		-45710	45710
Elemento X3	Ke=	60880	-30440
		-30440	30440
Elemento X4	Ke=	60880	-30440
		-30440	30440
Elemento X5	Ke=	320000	-160000
		-160000	160000
Elemento Y1	Ke=	91420	-45710
		-45710	45710
Elemento Y2	Ke=	125720	-62860
		-62860	62860
Elemento Y3	Ke=	479060	-239530
		-239530	239530

Se colocan los ejes en el centro de masas, figura 2, por lo tanto, las distancias de los distintos elementos a los ejes son las que se detallan a continuación.

El	**dir**	**distancia**
x1	X	-5
x2	X	-3
x3	X	1
x4	X	1
x5	X	5
y1	Y	-4
y2	Y	1
y3	Y	4

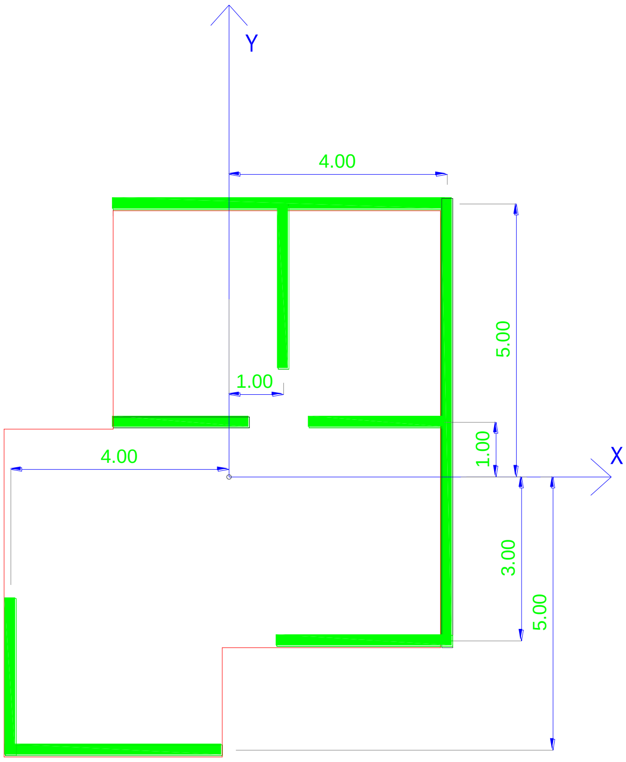

Figura 2. Sistema de ejes y distancias

Conociendo las matrices de rigidez de los elementos y sus coordenadas a un sistema de referencia, el siguiente paso es armar la matriz de rigidez de nudo de la estructura. Para esto se plantea en primer lugar la matriz de rigidez total de la estructura y las matrices de rotación para cada elemento. La forma de la matriz total es:

$$[K]=\begin{bmatrix} [k_{x1}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [k_{x2}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [k_{y1}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [k_{y2}] \end{bmatrix}$$

Donde en la diagonal principal se colocan las matrices de rigidez de los elementos, ordenando primero los elementos en dirección X y luego en dirección Y.

[K]=

162540	-81270	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-81270	81270	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	91420	-45710	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-45710	45710	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	60880	-30440	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-30440	30440	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	60880	-30440	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-30440	30440	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	320000	-160000	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-160000	160000	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	91420	-45710	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-45710	45710	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	125720	-62860	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-62860	62860	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	479060	-239530
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-239530	239530

Las matrices de rotación B_e para cada elemento se pueden armar de distinta manera si se pretende ordenar la matriz por rigidez o por nivel.

A continuación se muestra la submatriz para un elemento típico para ambos casos.

Caso 1: armado por nivel.

$$[B_e] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & sen(\alpha) & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & sen(\alpha) & r \end{bmatrix}$$

Caso 2: armado por dirección.

$$[B_e] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & sen(\alpha) & 0 & r & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & 0 & sen(\alpha) & 0 & r \end{bmatrix}$$

Donde α es el ángulo que forma el elemento con el eje X y *r* la distancia entre el centro de coordenadas y el elemento en estudio.

$$r = y\cos(\alpha) - x sen(\alpha)$$

Siendo *x* e *y* las coordenadas del elemento en estudio.

Esta matriz B_e tiene tantas filas como niveles posee la estructura y en columnas se encuentras las proyecciones de las rigideces respecto al eje X e Y.

La matriz de nudo se calcula como

$$[K_n] = [B]^T[K][B]$$

Para el caso 1, la matriz B total es:

[B]=	1	0	-5	0	0	0	Elem. 1 X-piso 1
	0	0	0	1	0	-5	Elem. 1 X-piso 2
	1	0	-3	0	0	0	Elem. 2 X-piso 1
	0	0	0	1	0	-3	Elem. 2 X-piso 2
	1	0	1	0	0	0	Elem. 3 X-piso 1
	0	0	0	1	0	1	Elem. 3 X-piso 2
	1	0	1	0	0	0	Elem. 4 X-piso 1
	0	0	0	1	0	1	Elem. 4 X-piso 2
	1	0	5	0	0	0	Elem. 5 X-piso 1
	0	0	0	1	0	5	Elem. 5 X-piso 2
	0	1	4	0	0	0	Elem. 1 Y-piso 1
	0	0	0	0	1	4	Elem. 1 Y-piso 2
	0	1	-1	0	0	0	Elem. 2 Y-piso 1
	0	0	0	0	1	-1	Elem. 2 Y-piso 2
	0	1	-4	0	0	0	Elem. 3 Y-piso 1
	0	0	0	0	1	-4	Elem. 3 Y-piso 2

y para el caso 2:

[B]=	1	0	0	0	-5	0	Elem. 1 X-piso 1
	0	1	0	0	0	-5	Elem. 1 X-piso 2
	1	0	0	0	-3	0	Elem. 2 X-piso 1
	0	1	0	0	0	-3	Elem. 2 X-piso 2
	1	0	0	0	1	0	Elem. 3 X-piso 1
	0	1	0	0	0	1	Elem. 3 X-piso 2
	1	0	0	0	1	0	Elem. 4 X-piso 1
	0	1	0	0	0	1	Elem. 4 X-piso 2
	1	0	0	0	5	0	Elem. 5 X-piso 1
	0	1	0	0	0	5	Elem. 5 X-piso 2
	0	0	1	0	4	0	Elem. 1 Y-piso 1
	0	0	0	1	0	4	Elem. 1 Y-piso 2
	0	0	1	0	-1	0	Elem. 2 Y-piso 1
	0	0	0	1	0	-1	Elem. 2 Y-piso 2
	0	0	1	0	-4	0	Elem. 3 Y-piso 1
	0	0	0	1	0	-4	Elem. 3 Y-piso 2

Por lo tanto, las matrices K_n para los casos 1 y 2 son, respectivamente:

Caso 1:

$[K_n]=$

695720	0	634800	-347860	0	-317400	**X1**
0	696200	-1676280	0	-348100	838140	**Y1**
634800	-1676280	22261440	-317400	838140	-11130720	**R1**
-347860	0	-317400	347860	0	317400	**X2**
0	-348100	838140	0	348100	-838140	**Y2**
-317400	838140	-11130720	317400	-838140	11130720	**R2**

Caso 2:

$[K_n]=$

695720	-347860	0	0	634800	-317400	**X1**
-347860	347860	0	0	-317400	317400	**X2**
0	0	696200	-348100	-2E+06	838140	**Y1**
0	0	-348100	348100	838140	-838140	**Y2**
634800	-317400	-2E+06	838140	2.2E+07	-1E+07	**R1**
-317400	317400	838140	-838140	-1E+07	1.1E+07	**R2**

Se puede observar que en el caso 1 es similar a haber armado las matrices de cada nivel por separado y luego ensamblarlas en la diagonal principal, o sea, similar a la matriz de cada elemento individual, sin embargo en el caso dos están agrupadas las rigideces en X, Y y rotacionales en la diagonal principal, tal como la matriz ampliada de un nivel.

Recordando la matriz de rigidez para un sistema de un solo nivel, considerando el giro antihorario positivo.

$$[K_n] = \begin{bmatrix} \sum_{1}^{nx} K_{xi} & 0 & -\sum_{1}^{nx} K_{xi}\, y_i \\ 0 & \sum_{1}^{ny} K_{yi} & \sum_{1}^{ny} K_{yi}\, x_i \\ -\sum_{1}^{nx} K_{xi}\, y_i & \sum_{1}^{ny} K_{yi}\, x_i & \sum_{1}^{nx} K_{xi} y_i^2 + \sum_{1}^{ny} K_{yi} x_i^2 \end{bmatrix}$$

2.2 Cálculo de la matriz de masas [m]

Luego de haber armado la matriz de rigidez lateral de la estructura, es necesario armar las matrices de masa. Esta matriz debe ser armada siguiendo el mismo criterio de numeración de los grados de libertad que para la matriz de rigidez, o sea, por nivel o por dirección. De esta forma nos aseguramos que ambas matrices son compatibles entre sí.

Suponiendo una carga por nivel de q=720 kN (11.25 kN/m^2) y un momento de inercia respecto al origen I_o=760.33 m^4 y un área de A=64m^2, la matriz de masas se arma como sigue a continuación.

M_x=M_y=q/g=73.39 kNs^2/m=73.39 T

I_p=13.667xM/A =871.94 Ts^{2}m

De esta forma, la matriz de masas para un solo nivel es:

$$[M] = \begin{bmatrix} M & 0 & -My_g \\ 0 & M & Mx_g \\ -My_g & Mx_g & I_p + Mx_g^2 + My_g^2 \end{bmatrix}$$

El valor de I_o se ha calculado como el momento de inercia de la planta respecto al baricentro, I_o=I_x+I_y, siendo I_x e I_y los momentos de inercia respecto a los ejes X e Y baricéntricos de la planta.

Y extendida al edificio en estudio

Caso 1:

X1	73.39	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Y1	0.00	73.39	0.00	0.00	0.00	0.00
R1	0.00	0.00	871.94	0.00	0.00	0.00
X2	0.00	0.00	0.00	73.39	0.00	0.00
Y2	0.00	0.00	0.00	0.00	73.39	0.00
R2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	871.94

Caso 2:

X1	73.39	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
X2	0.00	73.39	0.00	0.00	0.00	0.00
Y1	0.00	0.00	73.39	0.00	0.00	0.00
Y2	0.00	0.00	0.00	73.39	0.00	0.00
R1	0.00	0.00	0.00	0.00	871.94	0.00
R2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	871.94

Se observa que las dos matrices de masas son diagonales, dado que los ejes de referencia están colocados en el centro de masas (x_g = y_g = 0).

3. CALCULO DE [k] y [m] RESPECTO DE UN PUNTO CUALQUIERA DE LA PLANTA

Para completar el ejemplo, vamos a considerar que el origen del sistema de referencia se ubica una esquina de la planta, como se muestra en la Figura 3. En este caso, la matriz de masas se modifica dado que cambia el momento de inercia y el momento polar de inercia:

$$I_{o2}=3384.66\ m^4$$

$$I_{p2} = I_p + Mx_g^2 + My_g^2 = I_{o2}\frac{M}{A}$$

donde I_p es la inercia polar referida a los ejes baricéntricos, y los valores I_{o2} e I_{p2} son el momento de inercia e inercia polar respecto a los ejes en la esquina de la planta.

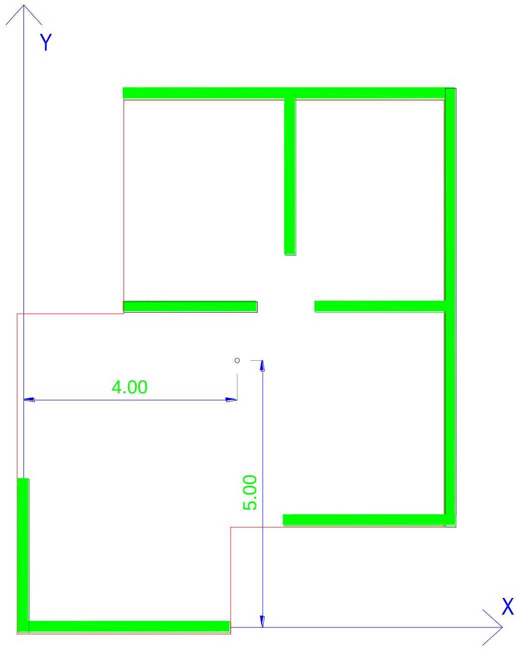

Figura 3: ejes en la esquina inferior

En este caso, I_{p2}=3881.25 Ts^2m

Ahora, las matrices de masas no son diagonales, quedando como términos fuera de la diagonal principal los momentos estáticos de las masas, o sea, la masa por la distancia al eje.

S_x = -M y_g=-366.97 Tm

S_y = M x_g=293.58 Tm

Caso 1:

X1	73.39	0.00	-366.97	0.00	0.00	0.00
Y1	0.00	73.39	293.58	0.00	0.00	0.00
R1	-366.97	293.58	3881.25	0.00	0.00	0.00
X2	0.00	0.00	0.00	73.39	0.00	-366.97
Y2	0.00	0.00	0.00	0.00	73.39	293.58
R2	0.00	0.00	0.00	-366.97	293.58	3881.25

Caso 2:

X1	73.39	0.00	0.00	0.00	-366.97	0.00
X2	0.00	73.39	0.00	0.00	0.00	-366.97
Y1	0.00	0.00	73.39	0.00	293.58	0.00
Y2	0.00	0.00	0.00	73.39	0.00	293.58
R1	-366.97	0.00	293.58	0.00	3881.25	0.00
R2	0.00	-366.97	0.00	293.58	0.00	3881.25

La matriz de rigidez se calcula en forma análoga a la indicada en la sección 2.1, si bien en este caso deben cambiarse las coordenadas *x* e *y* en las matrices B_e de cada uno de los elementos estructurales.