

Universidad Nacional de Cuyo - Facultad de Ingeniería

Ingeniería Sismorresistente

Sistema de N grados de libertad

Análisis modal

Dr. Francisco J. Crisafulli
Profesor Titular

2019 – Modificado 2020 -2021 - 2024

ÍNDICE

ÍNDICE.....	2
1. INTRODUCCIÓN.....	3
1.1 El problema dinámico.....	3
1.2 Grados de libertad dinámicos	4
2. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO PARA SISTEMAS DE N GDL	6
3. MODELACIÓN Y ANÁLISIS ESTRUCTURAL	9
3.1 Etapas del análisis estructural	9
3.2 Tipos de modelos	10
3.3 Modelos de elementos finitos.....	11
4. DETERMINACIÓN DE LAS MATRICES ESTRUCTURALES k, m y c.....	13
4.1 Determinación de la matriz de rigidez	13
4.1.1 Método clásico.....	14
4.1.2 Método de la rigidez directa	15
4.1.3 Inversión de la matriz de flexibilidad	16
4.2 Determinación de la matriz de masa	17
4.2.1 Masas concentradas	21
4.2.2 Masas consistentes.....	23
4.3 Determinación de la matriz de amortiguamiento	25
4.4 Condensación estática	26
5. ACCIÓN SÍSMICA.....	27
5.1 Formulación de la ecuación de equilibrio dinámico.....	27
5.2 Excitación multicomponente	30
5.3 Excitación multisoporte	31
6. VIBRACIÓN LIBRE	34
6.1 Sistemas sin amortiguamiento, $c=0$	34
6.1.1 Solución de la ecuación de equilibrio dinámico.....	34
6.1.2 Formas modales, frecuencias y periodos	36
6.1.3 Condiciones de ortogonalidad de las formas modales.....	39
6.2 Sistemas con amortiguamiento, $c\neq 0$	40
7. ANÁLISIS MODAL	41
7.1 Formulación general.....	41
7.2 Matriz de amortiguamiento clásico	44
7.3 Formulación para acción sísmica	47
7.4 Determinación de los parámetros de respuesta estructural.....	49
7.5 Número de modos a considerar en el análisis modal	53
8. ANALISIS MODAL ESPECTRAL	53
8.1 Formulación general.....	53
8.2 Reglas de combinación modal.....	57

8.3	Resumen del análisis modal espectral y comparación	59
8.4	Consideraciones adicionales y limitaciones del método	60
9.	EJEMPLO DE APLICACIÓN	62
	BIBLIOGRAFÍA.....	64

1. INTRODUCCIÓN.

1.1 El problema dinámico

El propósito de la dinámica estructural es desarrollar métodos de análisis para calcular la respuesta (en términos de desplazamientos, solicitaciones, tensiones, etc.) de estructuras sometidas a acciones de distinto tipo que varían en el tiempo, originando así la vibración de la estructura considerada. Como ejemplo de acciones dinámicas podemos mencionar las inducidas por motores o equipos con ejes en rotación, el efecto del viento, de explosiones o de las olas (presiones dinámicas), el impacto de vehículos o embarcaciones y los terremotos. Este último caso representa una situación particular en la que el movimiento del suelo (producido por las ondas sísmicas) origina la vibración de la estructura.

La principal característica a considerar para resolver el problema dinámico es que el tiempo se incorpora como una variable del problema. La vibración inducida por las acciones dinámicas implica que los desplazamientos varían en el tiempo y por ende los componentes de la construcción están sometidos a velocidades y aceleraciones. Es así que se inducen fuerzas de inercias (asociadas a la masa de la construcción) y efectos de disipación de la energía mecánica (por ejemplo, debido al amortiguamiento interno de la estructura). En contraposición, la estática asume que la estructura se deforma por efecto de los distintos tipos de acciones, pero ese proceso es suficientemente lento como para despreciar los efectos inerciales o de disipación de energía.

La dinámica estructural es una disciplina compleja y su estudio, usualmente, se divide en dos partes principales: estructuras simples (que pueden representarse mediante 1 grado de libertad) y sistemas de varios grados de libertad. La diferencia entre ambos radica principalmente en que estos últimos se analizan matemáticamente por un sistema de ecuaciones y su representación se basa en el álgebra matricial. Además, es necesario considerar el tipo de función que define la variación de la acción dinámica en el tiempo. Este aspecto es relevante porque el tipo de función determina el método de resolución a emplear en el análisis.

La Tabla 1 presenta una clasificación de las acciones dinámicas más usuales en construcciones civiles y se indican ejemplos para cada caso. Es importante aclarar que el viento es una acción dinámica muy compleja, debido a los cambios de velocidad, turbulencias, efecto de construcciones cercanas, etc. En la práctica, sin embargo, el efecto del viento sobre las construcciones se considera mediante presiones estáticas.

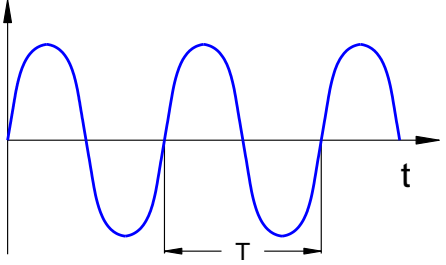
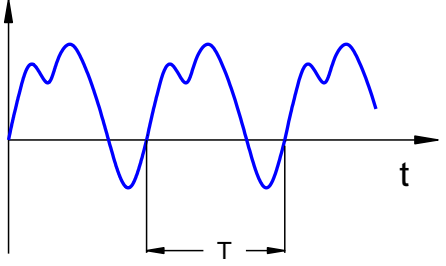
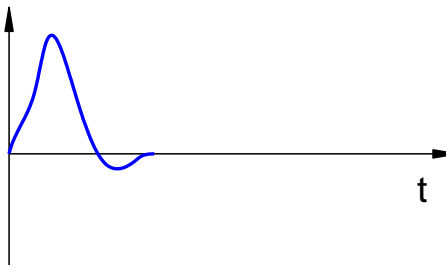
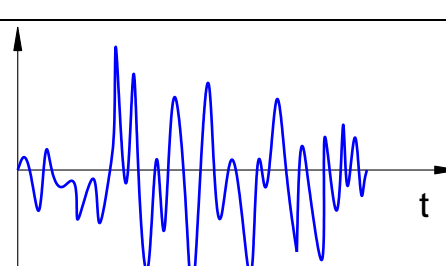
En esta guía de estudio vamos a formular las ecuaciones de equilibrio dinámico para sistemas de N grados de libertad (usualmente abreviado como N GDL) y desarrollaremos el método de superposición modal, que es uno de los más utilizados para el análisis dinámico de estructuras

sometidas a la acción sísmica.

1.2 Grados de libertad dinámicos

El concepto de grado de libertad es común en diversos campos de la física e ingeniería. En general puede definirse como el grupo de variables que en forma unívoca caracterizan el estado de un sistema. En el caso particular de la dinámica estructural, se define **grado de libertad dinámico** como las coordenadas (o desplazamientos) necesarios para definir la configuración deformada o posición del sistema en un instante dado (con respecto a su posición original).

Tabla 1. Clasificación de las acciones dinámicas según el tipo de función que la representa.

Tipo de función		Características principales
Periódicas	Armónica simple	<p>La fuerza dinámica se representa mediante una función seno o coseno.</p> <p>Ejemplo: fuerzas inducidas por motores y máquinas con una masa excéntrica que gira con velocidad angular constante.</p> 
	Armónica	<p>La fuerza se representa mediante una serie con funciones trigonométricas simples.</p> <p>Ejemplos: presiones hidrodinámicas (oleaje).</p> 
No periódicas	Impulsiva	<p>La acción dinámica es de muy corta o corta duración (pulso) y se representa mediante una o varias funciones simples.</p> <p>Ejemplos: fuerzas producidas por el impacto de vehículos o naves; presiones generadas por explosivos.</p> 
	Variación aleatoria	<p>La fuerza o acción dinámica no se puede representar mediante funciones matemáticas.</p> <p>Ejemplo: movimiento del terreno producido por terremotos; presiones debidas a viento.</p> 

Como ejemplos de estructuras que pueden modelarse con 1 grado de libertad (1 GDL) podemos mencionar el caso de un tanque elevado o un puente simple, como se muestra en la Figura 1. Por el contrario, la mayoría de las construcciones civiles, edificios de distinto tipo, puentes, presas, etc.,

poseen una estructura y una distribución de masas que llevan a considerar varios o muchos grados de libertad (dependiendo de la complejidad del modelo) para una adecuada representación del problema dinámico.

La selección de los GDL para cada caso particular es una tarea de gran importancia. El número de GDL dinámicos a considerar para el análisis de una determinada estructura puede variar, dependiendo de la mayor o menor aproximación con que se formule el modelo matemático, si bien hay un mínimo requerido para obtener una representación adecuada. Para ello, es de fundamental importancia analizar los siguientes aspectos:

- Masas presentes en la construcción
- Distribución espacial de esas masas (debido a que sobre ellas se generan las fuerzas de inercia resultado de la vibración)
- Acción dinámica que genera la vibración de la estructura
- Características de la estructura, tipo de miembros y vínculos, a los efectos de estimar la deformada resultante de la vibración inducida por la acción dinámica considerada.

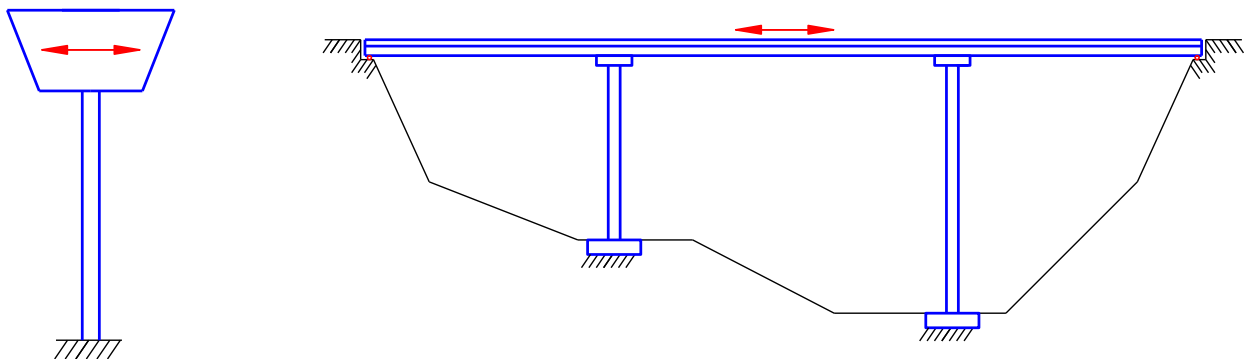


Figura 1. Ejemplos de estructuras simples que pueden modelarse como sistemas de 1 GDL.

Estos conceptos se explican mediante el ejemplo de la Figura 2, donde se considera un pórtico plano de tres pisos. La estructura se divide en 10 elementos que representan las vigas y columnas del pórtico, con 8 nodos. Los 2 nodos correspondientes al extremo inferior de las columnas se consideran como empotramientos, esto es se asume que los desplazamientos y rotaciones en dicho punto son nulos. De modo que quedan 6 nodos no restringidos donde se asumen 3 grados de libertad por nodo (las traslaciones horizontal y vertical y una rotación), con lo cual el sistema presenta 18 grado de libertad, Figura 2 (a). Este modelo permite incluir las deformaciones por esfuerzo axial, flexión y corte en todos los componentes del pórtico para una adecuada formulación de la matriz de rigidez, \mathbf{k} . En este ejemplo, todos los GDL se identifican con la letra "u", por simplicidad. Es importante notar, sin embargo, que los GDL $u_3, u_6, u_9, u_{12}, u_{15}$ y u_{18} son rotaciones nodales alrededor de un eje perpendicular al plano del pórtico.

Alternativamente, puede considerarse que las vigas y columnas del pórtico experimentan deformaciones axiales que son despreciables frente a las originadas por flexión y corte. A partir de esta aproximación, es posible eliminar como grado de libertad los desplazamientos verticales y

considerar que todos los nodos de un nivel experimentan la misma traslación horizontal, resultando en un modelo con 8 grados de libertad, Figura 2 (b). De esta forma se reducen significativamente los grados de libertad y se simplifica el modelo, no obstante, se mantiene una precisión adecuada, desde el punto de vista práctico, para calcular la matriz de rigidez y resolver el sistema de ecuaciones. Sin embargo, cuando se plantea el análisis dinámico del pórtico sometido a acciones dinámicas horizontales, puede resultar más conveniente considerar solamente 3 GDL, en correspondencia con los desplazamientos horizontales de piso, Figura 2 (c). Este criterio se basa en las siguientes hipótesis: (i) las masas se concentran a nivel de las vigas de piso, generando ahí las fuerzas de inercia horizontales, y (ii) las deformaciones axiales de las vigas y columnas son despreciables (como se consideró en el caso anterior para reducir los GDL considerados, Figura 2(b)). Posteriormente, al analizar los distintos métodos para calcular la matriz de rigidez del sistema en la Sección 4.1, volveremos sobre este ejemplo.

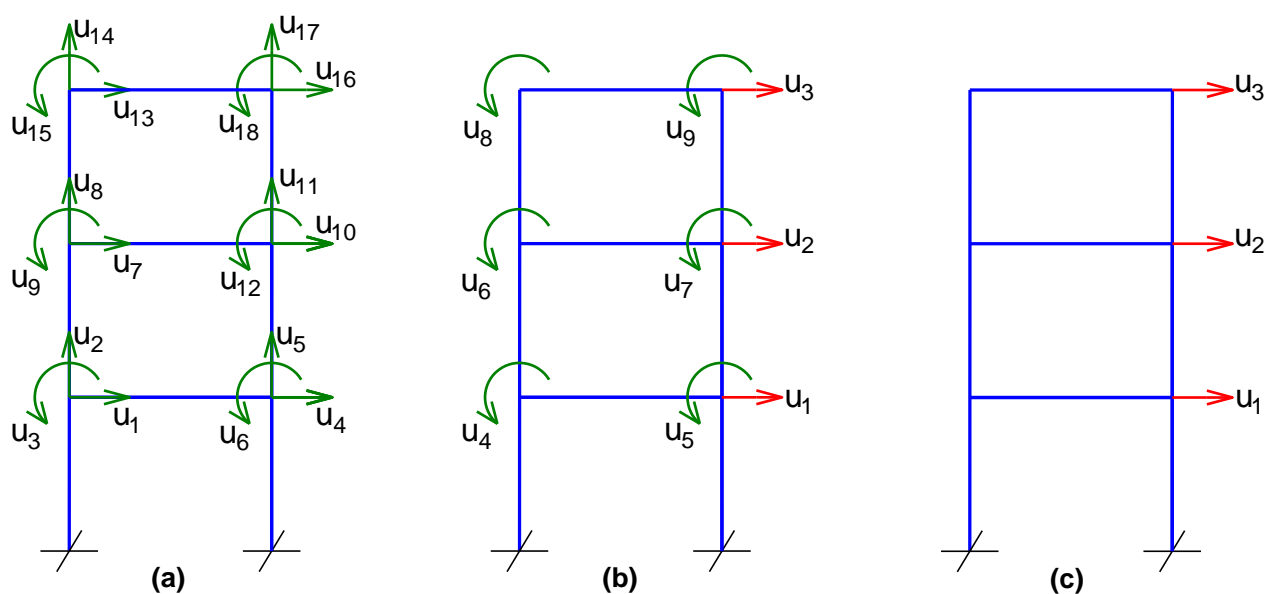


Figura 2. Grados de libertad en un pórtico de 3 niveles: (a) 3 GDL nudo, (b) 9 GDL, 6 rotaciones y 3 desplazamientos, y (c) 3 GDL, desplazamientos para análisis dinámico.

La denominación para identificar los GDL, al igual que la secuencia de numeración, puede adoptarse según distintos criterios. Así por ejemplo, en la Figura 2 los GDL se identifican todos con la letra “u”, independientemente del tipo de variable cinemática considerada. Alternativamente se podría haber designado como u_x , u_y y u_θ a los desplazamientos horizontales, verticales y rotaciones de nudo, respectivamente.

2. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DINÁMICO PARA SISTEMAS DE N GDL

La formulación de la ecuación de equilibrio dinámico para sistemas de N GDL se puede realizar según distintos criterios. En este caso, aplicaremos el Principio de d’Alembert, en forma conceptualmente similar que para el caso de sistemas de 1 GDL. La diferencia radica en que el equilibrio entre las

fuerzas de inercia f_i , fuerzas de amortiguamiento f_D , fuerzas restitutivas elásticas f_s y fuerzas exteriores $p(t)$ debe plantearse en cada uno de los GDL considerados, de modo que tenemos un sistema de N ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} &= p_1(t) \\ \dots & \\ f_{Ii} + f_{Di} + f_{Si} &= p_i(t) \\ \dots & \\ f_{IN} + f_{DN} + f_{SN} &= p_N(t) \end{aligned} \quad (1)$$

La Ecuación 1 puede expresarse en forma más compacta indicando cada una de las fuerzas como un vector de orden N:

$$\{f_I\} + \{f_D\} + \{f_S\} = \{p(t)\} \quad \equiv \quad \mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = \mathbf{p}(t) \quad (2)$$

Las fuerzas internas indicadas en las Ecuaciones 1 o 2 pueden expresarse en función de un grupo de coeficientes de influencia que dependen de las propiedades estructurales. Así por ejemplo, las fuerzas elásticas f_s pueden expresarse como:

$$\begin{Bmatrix} f_{s1} \\ \dots \\ f_{si} \\ \dots \\ f_{sN} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{N1} & \dots & k_{Ni} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_i \\ \dots \\ u_N \end{Bmatrix} \quad \equiv \quad \mathbf{f}_s = \mathbf{k} \mathbf{u} \quad (3)$$

donde k es la matriz de rigidez y u el vector de desplazamientos (en los GDL considerados en el análisis). En forma similar, las fuerzas inerciales pueden determinarse como el producto de la matriz de masa por la aceleración, $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}$, y las fuerzas de amortiguamiento viscoso como la matriz de amortiguamiento por la velocidad, $\mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}$. A partir de estas consideraciones, podemos expresar la ecuación de equilibrio dinámico como:

$$[m]\{\ddot{u}\} + [c]\{\dot{u}\} + [k]\{u\} = \{p(t)\} \quad \equiv \quad \mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \quad (4)$$

En las Ecuaciones matriciales 2, 3 y 4 hemos usado dos notaciones diferentes: la primera emplea corchetes [] para designar matrices y llaves { } para los vectores, mientras que la segunda utiliza letras en negrita para indicar matrices y vectores (sin ninguna distinción entre ambos). En este trabajo utilizaremos ambas notaciones por razones didácticas; la primera para detallar el contenido de las matrices y vectores y la segunda también dado que es la usual en la bibliografía. Además, debemos aclarar que los desplazamientos son funciones del tiempo, por lo que deberíamos indicarlos como $\mathbf{u}(t)$, sin embargo, por razones de simplicidad empleamos \mathbf{u} .

La Ecuación 4 indica que el equilibrio dinámico de fuerzas se representa matemáticamente mediante un sistema de N ecuaciones diferenciales de segundo orden. Como es usual en estos casos, la velocidad (derivada primera del desplazamiento con respecto al tiempo) se indica con un

punto “.” por encima de la variable derivada (u en este caso) y la aceleración ((derivada segunda del desplazamiento con respecto al tiempo) con dos puntos “..”), como se indica en la Ecuación 5:

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} \quad \ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} \quad (5)$$

Para interpretar el significado de las variables que intervienen en la Ecuación 4 podemos considerar el ejemplo que se presenta en la Figura 3, correspondiente a un pórtico plano de N niveles. Dado que la mayoría de las masas a considerar se concentran en las losas de la estructura, se adoptan N GDL para el modelo. Las incógnitas a determinar para resolver el problema son el vector de desplazamientos y sus derivadas. Como se muestra esquemáticamente en la Figura 3, la estructura vibra por efecto de la excitación exterior, por lo cual todas las componentes del vector de desplazamientos son funciones del tiempo, al igual que las del vector velocidad y aceleración.

Es importante aclarar que la Ecuación 4 es válida para un sistema que se comporta en régimen lineal y elástico, en el cual las fuerzas restitutivas son proporcionales a la rigidez, $\mathbf{f}_s = \mathbf{k}\mathbf{u}$. Si esta condición no se cumple, la matriz de rigidez es no lineal, y las fuerzas restitutivas se expresan, en forma genérica, como $\mathbf{f}_s = \mathbf{f}(\mathbf{u})$. En este caso, la ecuación de equilibrio dinámico se expresa como:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}_s(\mathbf{u}) = \mathbf{p}(t) \quad (6)$$

Para obtener la solución de esta ecuación se requiere resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales. Los métodos para resolver este problema escapan de los alcances de esta guía de estudio.

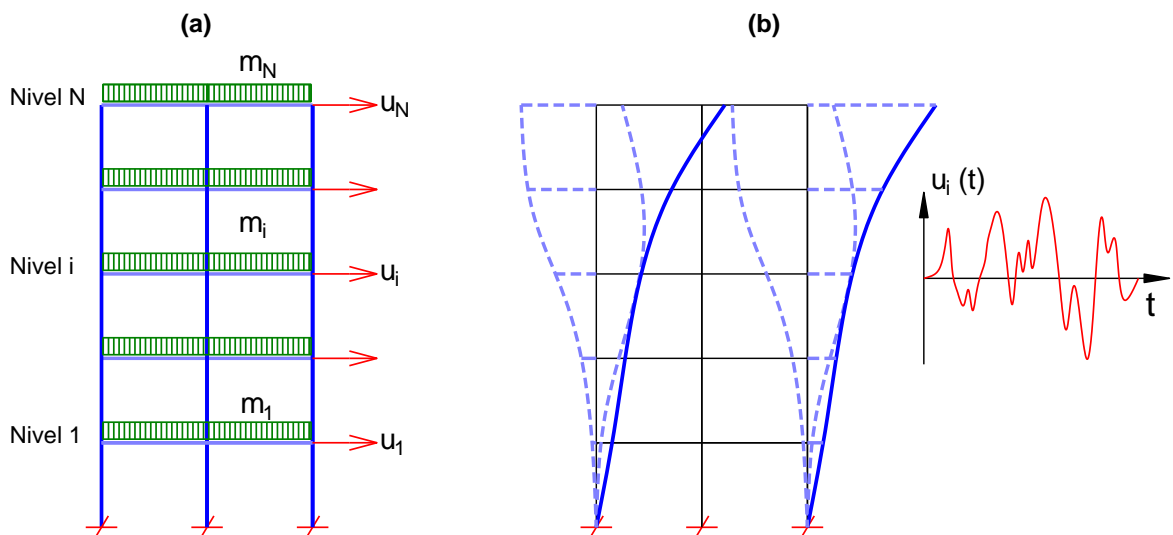


Figura 3. (a) Grados de libertad dinámicos para un pórtico plano y (b) esquema de la estructura vibrando.

La solución de la ecuación de equilibrio dinámico, Ecuación 4, es uno de los objetivos principales de la dinámica estructural. Esta solución puede formularse en el dominio del tiempo o de la frecuencia. En general, los procedimientos más usuales para las aplicaciones de ingeniería sismorresistente se plantean en el dominio del tiempo y, para el caso de estructuras lineales y

elásticas, los principales métodos son dos:

- a) Método de integración directa: consiste en resolver directamente la ecuación de equilibrio dinámico como un sistema de N ecuaciones diferenciales de segundo orden. Usualmente, se emplean métodos numéricos, particularmente cuando la acción dinámica es compleja y no puede representarse mediante funciones matemáticas simples, como es el caso de la acción sísmica.
- b) Método de análisis modal o de superposición modal: este procedimiento consiste en aplicar una transformación matemática que permite desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales y así obtener la solución en forma más simple, mediante la superposición de la respuesta de osciladores de 1 GDL. A su vez este procedimiento se puede subdividir en dos métodos: análisis modal temporal, en el cual la acción dinámica se define como una función temporal y análisis modal espectral (o análisis modal con respuesta espectral), para el caso particular de acción sísmica definida mediante un espectro. En las Secciones 7 y 8 de este trabajo analizaremos en detalle ambos procedimientos.

Es conveniente destacar algunas consideraciones generales respecto a las matrices que intervienen en la ecuación de equilibrio dinámico que, si bien pueden resultar obvias, son muy importantes:

- Las matrices de masa, rigidez y amortiguamiento deben formularse considerando los mismos grados de libertad a los efectos de que las fuerzas internas sean consistentes entre sí.
- Los criterios de discretización y los grados de libertad (o desplazamientos) a considerar en el modelo dependen de las características de la estructura, de la acción dinámica y de los objetivos del análisis. Así por ejemplo, éstos pueden ser distintos para una misma estructura según se considere realizar un análisis estático o dinámico.
- El número de GDL dinámicos, usualmente, es menor que el de GDL considerados en un análisis estático. Ello es así, en primer lugar, porque el análisis dinámico es más complejo y, además, se trata de considerar solamente los GDL asociados a las masas más significativas de la construcción (dado que allí es donde se generan las fuerzas de inercia).

A continuación, discutiremos los aspectos relevantes para la resolución de la ecuación de equilibrio dinámico, como son la implementación de un modelo matemático para representar la estructura y la evaluación de las tres matrices, **k**, **m** y **c**, que caracterizan su comportamiento dinámico.

3. MODELACIÓN Y ANÁLISIS ESTRUCTURAL

3.1 Etapas del análisis estructural

En análisis estructural representa una tarea dentro de un proceso más amplio y complejo, como es el diseño de toda la estructura requerida para una determinada construcción. Su objetivo principal es evaluar el efecto que las cargas o acciones exteriores producen en la estructura y sus componentes. De modo que es una herramienta que nos permite obtener las demandas, en

términos de resistencia y de deformaciones, para realizar las verificaciones que requiere el proceso de diseño. Es importante aclarar que el análisis estructural puede plantearse según distintas hipótesis y criterios, dependiendo de su objetivo. Así por ejemplo, pueden ser análisis elásticos o inelásticos, considerando pequeñas o grandes deformaciones, estáticos o dinámicos, etc. El estudio detallado de estos distintos tipos de análisis no se presenta en esta guía porque excede los alcances del tema en desarrollo, solo se indican conceptos básicos y generales.

En el análisis estructural podemos distinguir tres etapas bien diferenciadas entre sí, cuyas principales características deben conocerse para su adecuada aplicación:

- a) **Modelación:** la estructura real se representa mediante un modelo matemático, el cual siempre constituye una aproximación, más allá de la complejidad con que se formule. El modelo debe reproducir adecuadamente la geometría, condiciones de vínculos externos e internos, propiedades mecánicas de los materiales, cargas actuantes sobre la construcción, etc., de modo de captar los aspectos más relevantes del comportamiento de la estructura real.
- b) **Cómputo:** comprende todas las tareas requeridas para obtener los resultados a partir del modelo implementado previamente. Esta tarea, usualmente, implica la resolución de un sistema de ecuaciones, de distintas características según el tipo de análisis, mediante la aplicación de métodos numéricos con diverso grado de complejidad.
- c) **Interpretación:** Los resultados obtenidos en la etapa anterior, principalmente solicitaciones, tensiones, desplazamientos, deformaciones, etc., deben ser verificados para asegurar su validez. Es frecuente que se produzcan errores como resultado de una inadecuada modelación, aunque también podrían surgir debido a problemas en el algoritmo de cálculo o en la resolución numérica. La representación gráfica de los resultados, por ejemplo, mediante diagramas de solicitaciones o curvas deformadas de la estructura, facilita la tarea del ingeniero para detectar posibles errores. La realización de comprobaciones manuales simples, como la verificación de las condiciones de equilibrio interno o de equilibrio entre las reacciones de vínculos con las cargas exteriores, representan una ayuda útil en esta etapa.

En la actualidad, la mayoría de los ingenieros estructurales realizan el análisis mediante programas de computación comerciales. En estos casos, la implementación del modelo y luego la interpretación de los resultados obtenidos, son los aspectos más importantes que debe realizar el usuario. Las tareas de cómputo se ejecutan en forma automática y el ingeniero no tiene mayor intervención al respecto.

3.2 Tipos de modelos

Los modelos, en general, son una abstracción de la realidad física que permiten reproducir ciertos aspectos del comportamiento de la estructura que se analiza. Los tipos de modelos para el análisis estructural son muy diversos y resulta difícil plantear una clasificación general que los agrupe a todos. Sin embargo, desde un punto de vista práctico y considerando las aplicaciones de la dinámica estructural, los modelos pueden dividirse en dos grupos principales:

- a) **Modelos continuos:** la estructura se analiza como un medio continuo y se establecen relaciones compatibilidad y equilibrio considerando elementos diferenciales. A partir de estas

consideraciones se pueden plantear ecuaciones analíticas, usualmente ecuaciones diferenciales, las cuales se pueden resolver con diversos procedimientos y métodos de la matemática. El resultado es una o varias funciones matemáticas que varían en el tiempo (solución de forma cerrada). En general, estos modelos son aplicables en estructuras que presentan geometría y condiciones de vínculo y de carga simples.

- b) **Modelos discretos:** en estos modelos el continuo se divide en partes o porciones pequeñas, las que se conectan entre sí, con el objeto de que funciones o variables continuas puedan expresarse en forma discreta, permitiendo así su posterior resolución mediante aproximación numérica. Este tipo de modelos son la base para la aplicación de procedimientos como el método de los elementos finitos, método de los elementos discretos, método de los elementos de contorno, método de las diferencias finitas (utilizado usualmente para resolver numéricamente problemas con ecuaciones diferenciales con derivadas parciales), etc.

3.3 Modelos de elementos finitos

El método de los elementos finitos, implementado a través de modelos discretos, es sin lugar a dudas el procedimiento más utilizado en la práctica profesional de la ingeniería estructural. En estos modelos la estructura real se divide en un número finito de **elementos** simples, que poseen distintas características según el tipo de estructura, los cuales se conectan entre sí en puntos llamados **nodos** (es por ello que también se denominan modelos nodo-elemento). Los nodos son puntos del espacio a través de los cuales se definen la geometría de la estructura a modelar. En ellos se conectan los elementos para dar continuidad al modelo, se aplican a las fuerzas exteriores y masas, se fijan los vínculos externos y se definen los desplazamientos nodales a determinar en el análisis.

En la implementación práctica del método de los elementos finitos se emplea el procedimiento de la rigidez directa, de modo que las incógnitas del problema son los desplazamientos nodales (grados de libertad del sistema). Éstos pueden ser traslaciones y/o rotaciones medidas según un sistema de referencia global. El número y tipo de desplazamientos a considerar en el análisis dependen de las características del modelo implementado (por ejemplo si es bidimensional o tridimensional) y de los elementos usados para representar la estructura. Así por ejemplo, en un pórtico plano formado por vigas y columnas es usual considerar 3 GDL por nodo (dos traslaciones y una rotación), mientras que en un pórtico tridimensional se consideran 6 GDL por nodo (tres traslaciones y tres rotaciones).

Al formular el modelo de elementos finitos, se asigna inicialmente a cada uno de los nodos un determinado número de GDL (por ejemplo, 3 o 6 GDL, según se considere una estructura bi o tridimensional). Luego, esta condición debe modificarse para definir los **vínculos externos o apoyos** (*restrains o supports*, en inglés), porque sabemos que las estructuras de construcciones civiles deben ser estables, para lo cual las fuerzas internas deben estar en equilibrio con las reacciones de vínculo. En el modelo, los vínculos se definen imponiendo la condición de que el desplazamiento o rotación es nula, con lo cual se elimina uno o más GDL del nodo donde se definen los vínculos. De esta forma se pueden representar apoyos móviles o fijos, empotramientos, etc. Es importante recordar que la estructura no debe ser hipostática, para lo cual deben definirse las condiciones de vínculo que aseguren este requerimiento (caso contrario la matriz de rigidez es singular y no se tiene

una solución única). Alternativamente, en los vínculos se pueden imponer desplazamientos (traslaciones o rotaciones) con un valor conocido distinto de cero, con lo cual ese desplazamiento ya no es una incógnita y se reduce el número de GDL del modelo. De esta forma se puede, por ejemplo, evaluar el efecto producido por un descenso de apoyo. Las dos condiciones descritas previamente definen nodos con desplazamientos restringidos, porque el valor de esos desplazamientos es conocido, ya sea porque adoptan un valor nulo o bien un valor distinto de cero que asigna el usuario.

En ciertos casos resulta conveniente para la implementación del modelo establecer relaciones entre los dos o más nodos de la estructura, mediante la definición de desplazamientos condicionados (*constrains*, en inglés). Los programas de análisis estructural permiten establecer distintas condiciones (las que se expresan matemáticamente mediante una ecuación) para imponer, por ejemplo, comportamiento de cuerpo rígido, condiciones de simetría o antisimetría o igualdad de desplazamientos. Un caso particular de desplazamientos condicionados, de mucha aplicación práctica es la condición de diafragma rígido para modelar el efecto de las losas de un edificio. Esta condición implica que todos los nodos se mueven juntos como en un plano rígido en el que las deformaciones de membrana son nulas, es decir que los puntos se desplazan pero la distancia relativa entre ellos se mantiene constante.

Se han desarrollado una gran cantidad de **elementos** para representar el comportamiento de la estructura y de sus componentes, como se muestra en los ejemplos de la Figura 4. Los elementos son, en la mayoría de los casos, deformables y su comportamiento se representa mediante modelos continuos que permite determinar su rigidez, para luego ensamblar la matriz de rigidez global de la estructura. Como ejemplo de elementos que se emplean usualmente podemos mencionar:

- Elemento lineal de 2 nodos con rigidez axial para representan estructuras reticuladas
- Elemento “pórtico” o elemento lineal de 2 nodos con rigidez axial, flexional y torsional para modelar vigas y columnas.
- Elemento tipo “resorte”, es un elemento unidimensional definido por un valor de rigidez axial o rotacional. Se emplea normalmente para representar aproximadamente el efecto de la deformabilidad de las fundaciones (en lugar de usar un vínculo con desplazamiento nulo).
- Elementos tipo membrana, con 3 o más nodos, para modelar estructuras de superficie con estados de tensión plana (o membranal).
- Elementos tipo placa, con 3 o más nodos, para representar estructuras de superficie, incluyendo además del estado membranal, la flexión fuera del plano de la placa.
- Elementos sólidos, con 4 o más nodos, para modelar estructuras volumétricas.

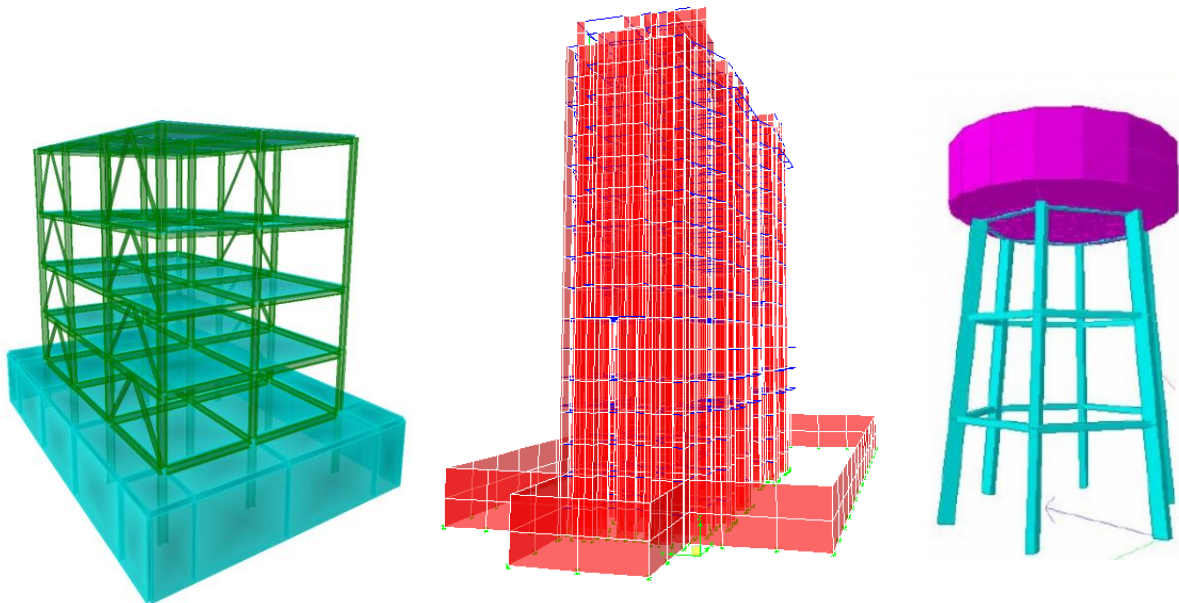


Figura 4. Ejemplos de estructuras modeladas con elementos de barra y elementos tipo membrana y placa.

Esta lista de elementos incluye solamente algunos ejemplos. Los programas de análisis estructural disponen de una amplia biblioteca de elementos para modelar la estructura, con características particulares para representar distintos tipos de componentes, comportamientos, formas, etc. Es importante notar que los programas comerciales son “cajas negras”, en las cuales el usuario no conoce en detalle el algoritmo y la programación implementada para formular el comportamiento de los distintos elementos disponibles. De modo que cuando elegimos un determinado elemento estamos aceptando el modelo matemático que el programador adoptó para su formulación.

4. DETERMINACIÓN DE LAS MATRICES ESTRUCTURALES k , m y c

4.1 Determinación de la matriz de rigidez

La matriz de rigidez representa las fuerzas que se desarrollan en la estructura cuando se aplican en forma alternada y sucesiva desplazamientos unitarios en los grados de libertad del sistema, mientras los restantes son nulos. Es decir que los coeficientes de la matriz son numéricamente iguales a las fuerzas aplicadas en los grados de libertad de la estructura para imponer una condición de desplazamientos. Esta definición puede explicarse a través del ejemplo de la Figura 5, donde se muestra un pórtico en el que se han definido 3 GDL (los desplazamientos horizontales de piso) y se muestran las deformadas y las fuerzas necesarias para imponer un desplazamiento unitario en cada uno de los niveles, mientras los otros los restantes son nulos. Así por ejemplo, cuando se impone un desplazamiento unitario en el piso 2, las fuerzas requeridas para ello determinan la segunda columna de la matriz de rigidez, con sus términos k_{12} , k_{22} y k_{32} . La Ecuación 7 muestra la matriz de rigidez para este ejemplo:

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \quad (7)$$

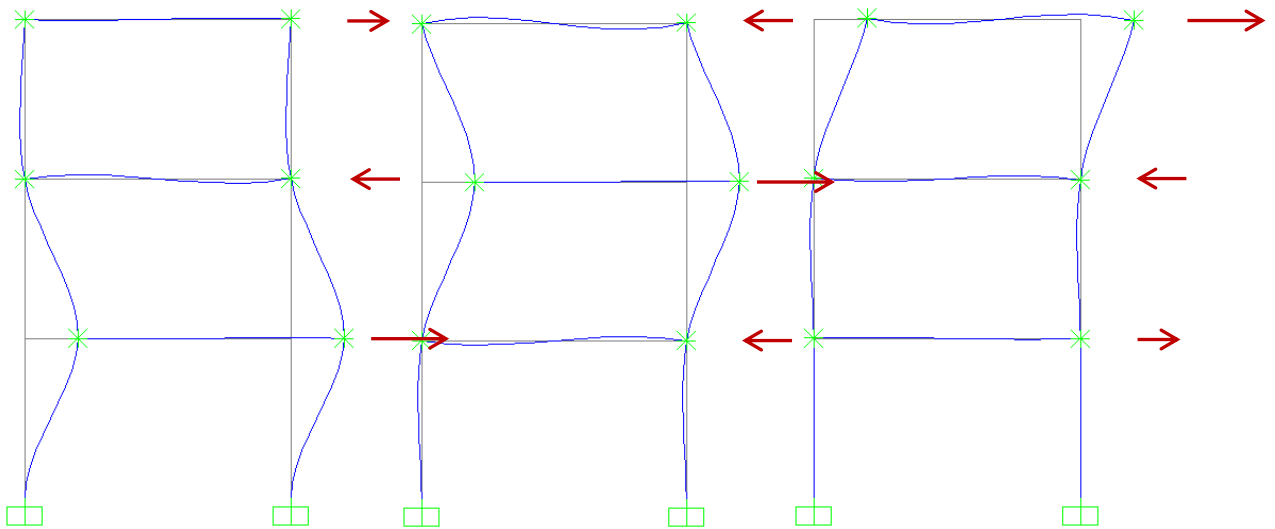


Figura 5. Aplicación de desplazamientos unitarios en los tres niveles del pórtico para la determinación de los coeficientes de la matriz de rigidez (sistema de 3GDL).

Es importante observar que las rotaciones nodales en el ejemplo de la Figura 5 no son nulas cuando se imponen el patrón desplazamientos requeridos para calcular la matriz de rigidez. Ello es así porque las rotaciones nodales no se consideran como GDL en ese ejemplo.

Las unidades de los coeficientes de la matriz de rigidez varían según el caso considerado, de modo que al multiplicar el coeficiente de rigidez por el desplazamiento o rotación que corresponda se tengan unidades de fuerza o momento. De modo que las unidades se expresan como [Fuerza/Longitud], [Fuerza] o [Fuerza x Longitud], según corresponda. En el Sistema Internacional usualmente se emplean las unidades kN/m, kN o kNm.

El cálculo de la matriz de rigidez puede realizarse mediante distintos procedimientos, cuyo estudio detallado y fundamentación escapa a los alcances de este trabajo, dado que es un tema de análisis estructural. Sin embargo, a modo de resumen, describimos en las próximas secciones los métodos más usuales. Es importante aclarar que estos procedimientos presentan ventajas y complicaciones, por lo que debe evaluarse cuál es el más conveniente de aplicar según el caso a analizar y las herramientas de cálculo disponibles.

4.1.1 Método clásico

Este procedimiento se basa en aplicar la definición de matriz de rigidez, es decir, se determinan los coeficientes de rigidez como las fuerzas necesarias para imponer desplazamientos unitarios en cada uno de los GDL del sistema, mientras los restantes son nulos. Este procedimiento puede aplicarse manualmente a estructuras simples, pero no resulta práctico para el caso de otras más complejas que se resuelven computacionalmente.

Para explicar este procedimiento podemos analizar nuevamente el pórtico representado en la Figura 2, recordando que los GDL estáticos requeridos para calcular la matriz de rigidez pueden ser distintos que los GDL dinámicos. En este ejemplo, las deformaciones de flexión deben incluirse en la evaluación de la rigidez, razón por la que resulta imprescindible considerar las rotaciones de los nudos como GDL (estáticos), si bien puede admitirse que las deformaciones axiales son insignificantes (en comparación a las inducidas por la flexión y corte) y por lo tanto es aceptable considerar 9 GDL, como se indica en la Figura 2(b).

Los coeficientes de la matriz de rigidez se determinan imponiendo desplazamientos unitarios en los distintos GDL, en forma alternada y sucesiva, mientras los restantes son nulos. En la Figura 6 se presentan las deformadas correspondientes a los casos $u_1=1$ (desplazamiento unitario en el primer nivel) y $u_4=1$ (rotación unitaria en un nudo del primer nivel). Se indican para esos casos los coeficientes de rigidez, que representan las fuerzas y momentos requeridos para imponer los patrones de desplazamiento. Si resulta necesario reducir el número de GDL para realizar el análisis dinámico, debe aplicarse el procedimiento de condensación estática (ver Sección 4.4).

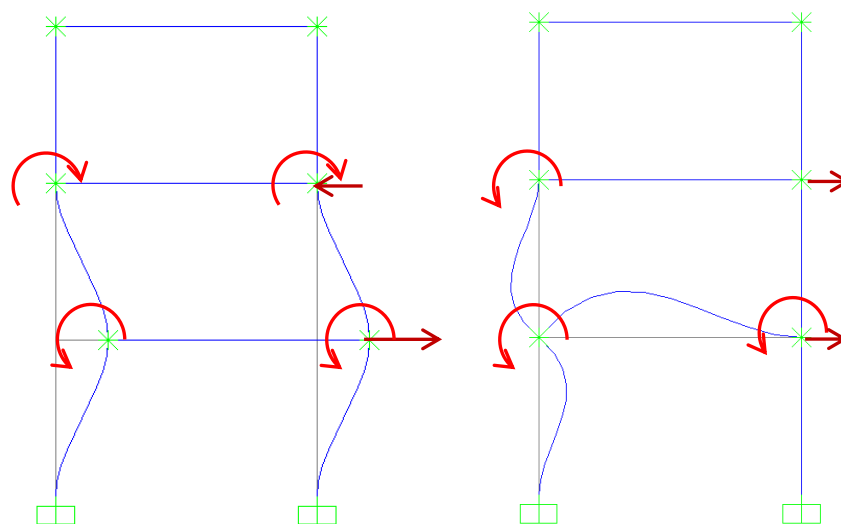


Figura 6. Aplicación de un desplazamiento unitario ($u_1=1$) y de una rotación unitaria ($u_4=1$). Los GDL se indican en la Figura 2(b).

4.1.2 Método de la rigidez directa

El método de la rigidez directa se aplica mediante la implementación de un modelo discreto en el que la estructura se divide en elementos vinculados entre sí a través de nodos. La matriz de rigidez asociada a los GDL del sistema completo (matriz de rigidez global) se determina considerando el aporte de cada uno de los elementos que integran el modelo. Para ello, se calcula la matriz de rigidez de cada uno de los elementos y sus coeficientes se ensamblan en la matriz global, dependiendo de los nodos a los que cada elemento está conectado. Este es el procedimiento usual que emplean los programas de análisis estructural basados en el método de los elementos finitos, dado que se presta para su implementación mediante un algoritmo computacional. Su aplicación mediante cálculos manuales resulta complicada, salvo el caso de estructuras con un número reducido de elementos.

Al igual que en el método anterior, la matriz de rigidez debe considerar todos los GDL necesarios para capturar adecuadamente el mecanismo de deformación de la estructura. Se debe analizar la importancia relativa de las deformaciones por flexión, corte, axial y torsión (en modelos tridimensionales), para determinar cuáles se incluirán en el modelo. Así por ejemplo, en el caso de los pórticos o tabiques deben incluirse las deformaciones por flexión y corte), lo cual implica considerar GDL rotacionales en los nodos del modelo. Si posteriormente se realiza el análisis dinámico con un número de GDL más reducido a los considerados para formular la matriz de rigidez, debe aplicarse el procedimiento de condensación estática (ver Sección 4.4).

4.1.3 Inversión de la matriz de flexibilidad

Este es un procedimiento en el cual se determina primero la matriz de flexibilidad, \mathbf{f} , y luego se invierte para obtener la matriz de rigidez, $\mathbf{k} = \mathbf{f}^{-1}$. La matriz de flexibilidad se obtiene aplicando fuerzas unitarias en los grados de libertad del modelo y calculando en cada caso los desplazamientos producidos por dichas fuerzas. La Figura 7 muestra la aplicación de este procedimiento al ejemplo del pórtico de 3 niveles analizado previamente (ver Figura 2), indicándose en el gráfico los coeficientes de la matriz \mathbf{f} , que representan desplazamientos producidos por fuerzas unitarias actuando alternadamente en los GDL del sistema. Para este caso, la matriz de flexibilidad es:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} \quad (8)$$

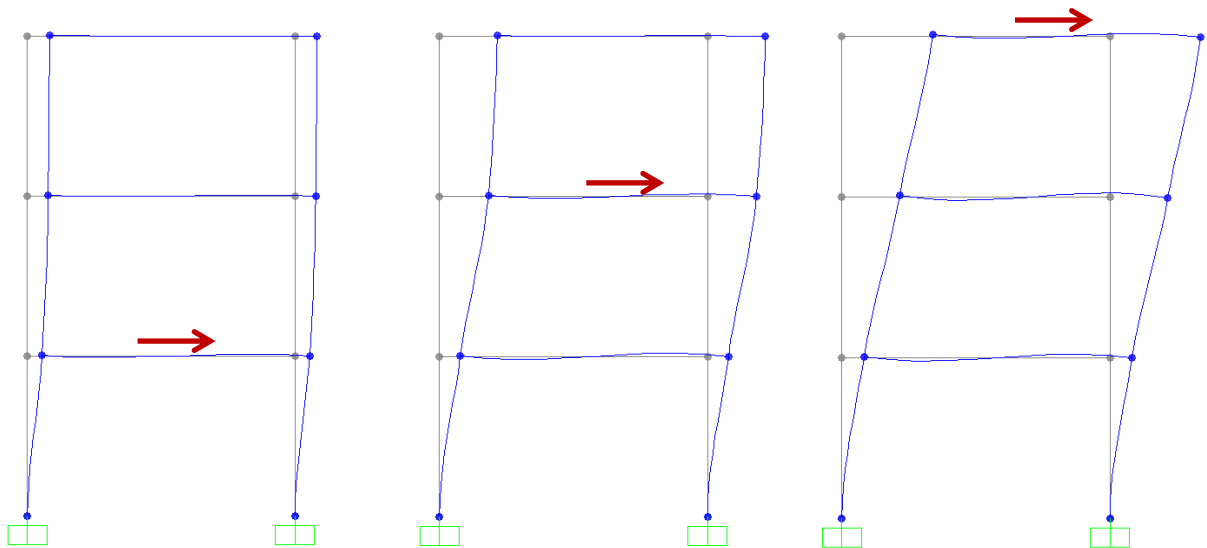


Figura 7. Aplicación de fuerzas unitarias en los tres niveles del pórtico para la determinación de los coeficientes de la matriz de flexibilidad (sistema de 3GDL).

El cálculo de los desplazamientos (y rotaciones) producidos por las fuerzas unitarias puede realizarse manualmente o con la ayuda de un programa de computación. La principal ventaja del procedimiento basado en la inversión de la matriz de flexibilidad es que, una vez definidos los GDL dinámicos, la matriz de flexibilidad (y por ende la de rigidez) puede calcularse considerando los

mismos GDL definidos previamente, sin necesidad de aplicar la condensación estática para reducir el número de GDL.

4.2 Determinación de la matriz de masa

La matriz de masa debe formularse asociada a un modelo que permita captar las fuerzas de inercia originadas por la vibración de la estructura. Los coeficientes de la matriz, conceptualmente, representan las fuerzas de inercia que se desarrollan en la estructura cuando se aplican en forma alternada y sucesiva aceleraciones unitarias en los grados de libertad del sistema, mientras las restantes son nulas. Observamos que esta definición es equivalente a la indicada previamente para la matriz de rigidez y su aplicación para la determinación de la matriz de masas conduce a matrices no diagonales, donde la mayoría de los coeficientes son distintos de cero (al igual que ocurre con la matriz de rigidez).

La unidad para expresar la masa, en el sistema internacional, es el kg (definido como la masa del prototipo formado por una aleación de platino e iridio que se guarda en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas de Francia), si bien también suele usarse la tonelada, t, equivalente a 1000 kg. Técnicamente, la tonelada debería denominarse como megagramo, Mg, pero este término no se emplea en la práctica.

Las fuerzas inerciales, usualmente, están asociadas a movimientos traslacionales, de modo que se considera la masa traslacional resultante de considerar los distintos elementos y partes de la construcción. En la práctica, el cálculo de las masas de una determinada estructura se realiza a partir del cómputo del peso de todos los elementos estructurales y no estructurales, incluyendo parte de las sobrecargas de uso. Recordemos que el CIRSOC 101-2005 Reglamento Argentino de cargas permanentes y sobrecargas mínimas para edificios y otras estructuras define los valores a considerar para una amplia variedad de materiales y casos. Luego de calcular el peso, W, se determina la masa, m, considerando que:

$$m = \frac{W}{g} \quad (9)$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($g=9.81 \text{ m/s}^2$). En modelos implementados en programas comerciales, el usuario normalmente selecciona las unidades para definir fuerzas y longitudes, por lo cual la masa se debe expresar en unidades [Fuerza x Tiempo² / Longitud].

En algunos casos particulares es necesario incluir los efectos inerciales resultantes de la vibración rotacional de las masas. Para ello se debe determinar el momento polar de inercia de las masas, lo (o I_p) respecto del punto o del eje alrededor del cual se considera que está rotando. Recordemos que I_o representa la resistencia de la masa a la rotación o vibración angular; es por ello que también esta propiedad también suele denominarse masa angular o inercia rotacional. El momento polar de inercia de las masas tiene unidades [Masa x Longitud²]. En el Sistema Internacional se expresa en kgm^2 (o tm^2). A continuación, a modo de repaso, analizamos las expresiones para calcular el momento de inercia polar de las masas para los casos más usuales.

El momento de inercia polar de un conjunto de N masas concentradas se expresa como:

$$I_o = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \quad (10)$$

donde m_i es una masa genérica y r_i su distancia al punto respecto del cual se calcula I_o , como se indica en la Figura 8.

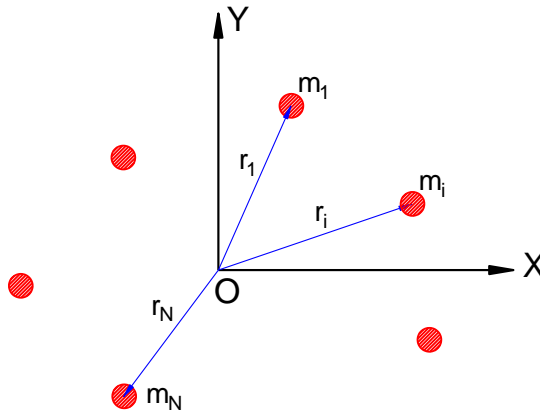


Figura 8. Sistemas de masas concentradas (puntuales).

En caso de analizar una determinada superficie que presenta una masa distribuida \bar{m} (masa por unidad de superficie), la determinación se realiza a partir de la siguiente integral (ver Figura 9):

$$I_o = \int_A \bar{m} r^2 dA \quad (11)$$

Si la masa \bar{m} se distribuye uniformemente sobre la superficie considerada, la Ecuación 9 se simplifica dado que dicha masa es una constante a los efectos de la integración, de modo que:

$$I_o = \bar{m} \int_A r^2 dA = \bar{m} \int_A (x^2 + y^2) dA = \bar{m} (I_x + I_y) \quad (12)$$

donde I_x e I_y son los momentos de inercia (del área) respecto de los ejes X e Y.

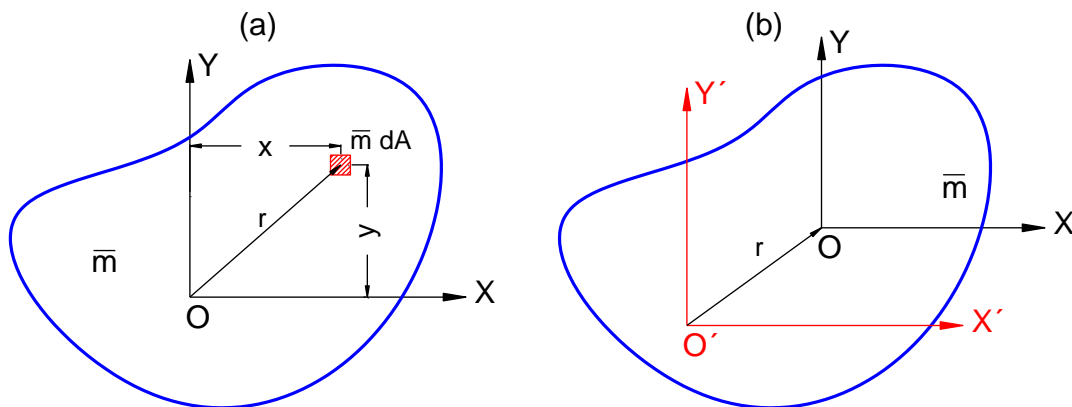


Figura 9. Losa plana de forma variable con masa uniformemente distribuida, (a) posición de un elemento diferencial de masa y (b) sistemas de referencia X-Y y X'-Y'.

En la Figura 10 se presentan las ecuaciones para calcular el momento de inercia polar de las masas para figuras simples respecto de un punto que coincide con el centro de masas, siendo válidas

para el caso de masa uniformemente distribuida. Se incluye también en la Figura 10, el caso de una masa uniformemente distribuida a lo largo de una línea. Este caso puede resultar de utilidad para analizar elementos rectos, como vigas o columnas, que rotan con movimiento de cuerpo rígido.

El momento de inercia polar de las masas, I_o , es siempre positivo y puede demostrarse que es aplicable el teorema de Steiner (o de los ejes paralelos) cuando quiere determinarse esta propiedad con respecto a otro sistema de coordenadas $X'-Y'$, ver Figura 9(b), de modo que:

$$I'_{o'} = I_o + mr^2 \quad (13)$$

El teorema de Steiner es útil en las aplicaciones prácticas cuando el sistema de referencia considerado en el modelo estructural no coincide con el centro de masas.

En las aplicaciones de dinámica estructural, el momento de inercia polar de las masas es la propiedad mediante la cual se consideran los momentos inerciales inducidos por la vibración rotacional. De modo que el momento de inercia polar está relacionado con la rotación alrededor de un eje, si bien es usual indicar el punto respecto al cual se define dicho parámetro. En los casos analizados previamente, masas puntuales o masas distribuidas sobre superficies planas o líneas, la distancia polar (definida como r , ver Figuras 8 y 9) se miden perpendiculares al eje de rotación, como se indica en los esquemas tridimensionales presentados en la Figura 11.

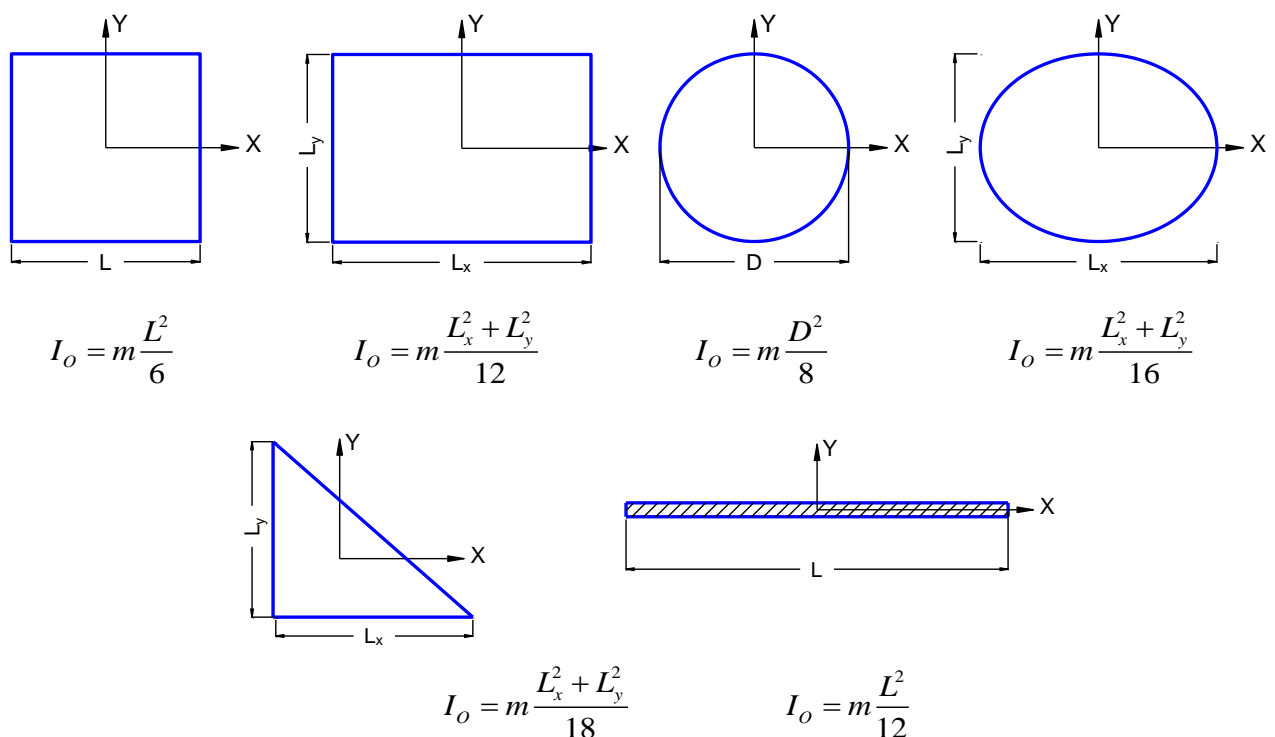


Figura 10. Ecuaciones para calcular el momento de inercia polar de las masas, respecto de su centro de masas, para figuras simples. En todos los casos, m es la masa total, la cual se distribuye uniformemente sobre la superficie considerada.

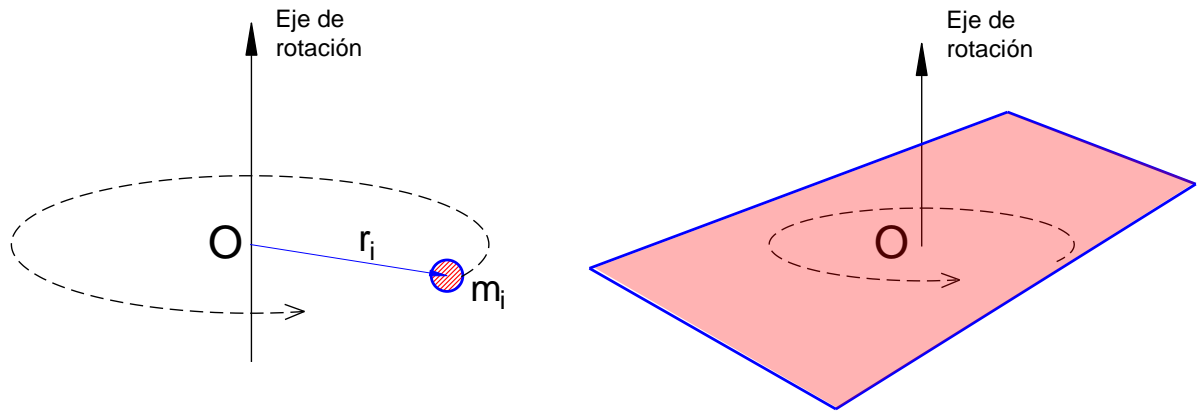
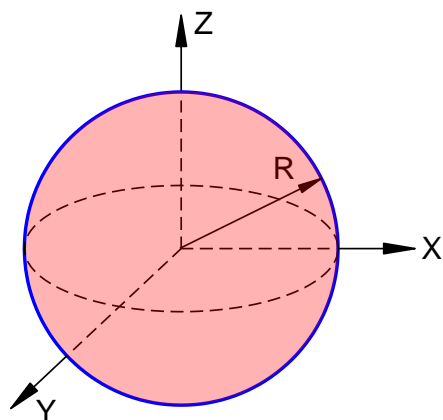


Figura 11. Rotación de las masas puntuales o distribuidas en una superficie alrededor de un eje.

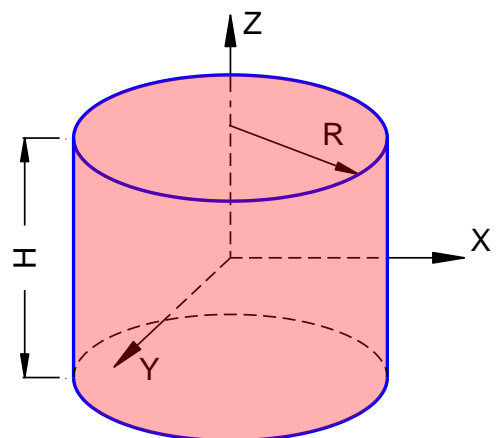
Para completar los aspectos vinculados al cálculo de I_O , debemos considerar también el caso de un cuerpo con densidad ρ (masa por unidad de volumen). Para ello se considera un elemento diferencial de masa ρdV el cual se encuentra a una distancia r del eje de referencia, de modo que I_O se obtiene mediante la siguiente integral.

$$I_O = \int_V \rho r^2 dV \quad (14)$$

A modo de ejemplo, la Figura 12 presenta las ecuaciones del momento polar de inercia de las masas para una esfera de radio R y para un cilindro de radio R y altura H (respecto de un sistema de ejes baricéntricos). En el primer caso la ecuación es independiente del eje considerado (por las condiciones de simetría), mientras que en el segundo, se indican las ecuaciones para rotación alrededor de los ejes X , Y y Z .



$$I_O = \frac{2}{5} mR^2$$



$$I_{Ox} = I_{Oy} = \frac{m}{12} (3R^2 + H^2), \quad I_{Oz} = \frac{m}{2} R^2$$

Figura 12. Momento de inercia polar de las masas correspondientes a la esfera y al cilindro, con masa total m y densidad constante.

En las aplicaciones ingenieriles, usualmente, se consideran las fuerzas inerciales más

importantes, despreciando los efectos secundarios, como por ejemplo los momentos originados la vibración rotacional de las de las masas. Ello es así, debido a la complejidad de la distribución de las masas en las construcciones y al hecho de que todos los componentes estructurales y no estructurales presentan cierta masa. De esta forma se busca reducir el número de GDL dinámicos del sistema, y con ello la complejidad del análisis.

El cálculo de la matriz de masa, cuando la estructura se representa mediante modelos discretos (ver Sección 3.2), se pueden realizar de acuerdo a dos procedimientos o criterios: masas concentradas y masas consistentes, según se describe en las secciones siguientes.

4.2.1 Masas concentradas

El criterio más simple para determinar la matriz de masas es asumir que las masas se concentran y se incorporan al modelo como masas puntales aplicadas en los nodos. Esto es una simplificación del problema real, dado que las masas se distribuyen en toda la estructura. La aplicación de este criterio conduce a una matriz de rigidez que es diagonal, porque no se considera el efecto que una masa aplicada en un determinado GDL ejerce en los restantes GDL. En el caso de que la estructura se modele con más de un GDL traslacional en cada nodo, por ejemplo 2 GDL traslacionales en un pórtico plano, ver Figura 2(a), o 3 GDL en un pórtico espacial, la masa asociada a esos GDL es la misma en cualquier dirección.

Presentamos a continuación dos ejemplos para mostrar prácticamente la aplicación de este procedimiento. En primer lugar, analizamos el pórtico de tres pisos que se muestra en la Figura 13, el cual está sometido a una cierta acción dinámica horizontal. En este caso se adopta un modelo con tres grados de libertad, definidos por los desplazamientos horizontales de cada uno de los niveles. Acorde a ello, las masas de los distintos componentes de la construcción (vigas, columnas, tabiques, losas, pisos, cerramientos, etc.) junto con las masas asociadas a las sobrecargas de servicio se concentran y se representan en el modelo como tres masas traslacionales concentradas. Para concentrar las masas en cada uno de los niveles del pórtico se aplica el concepto de área tributaria (o en forma genérica, zona o volumen tributario). En este caso, ello implica considerar toda la masa comprendida entre la mitad del nivel inferior y la mitad del nivel superior al piso considerado, como se indica esquemáticamente con las líneas de trazo en la figura. La matriz de masa para este ejemplo es:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

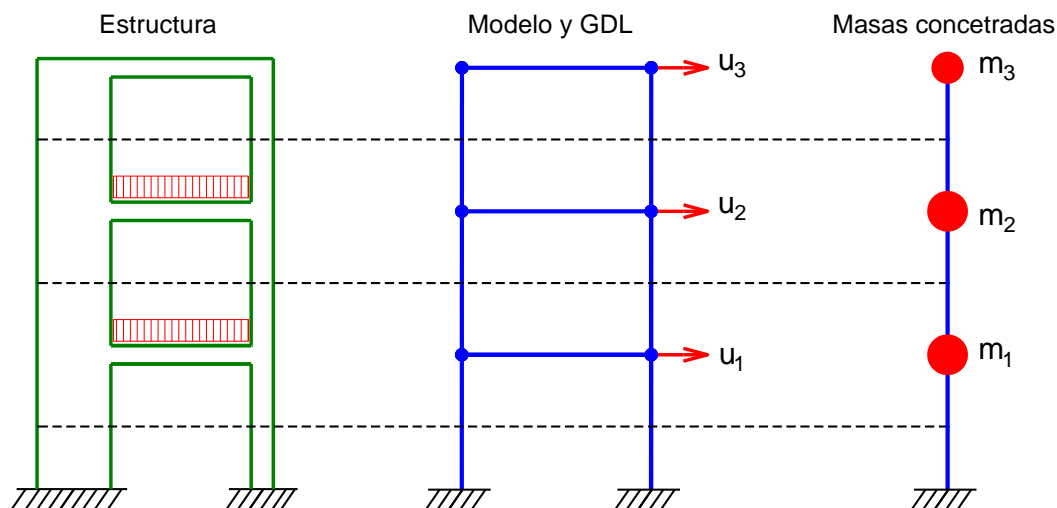


Figura 13. Modelo estructural y criterio para la concentración de masas para un pórtico de tres niveles.

En el segundo ejemplo, consideramos un tanque elevado, con masa m_T , el cual se encuentra apoyado en un soporte con masa m_S (la cual no es despreciable), ver Figura 14. Plantearemos un modelo discreto (método de los elementos finitos) para realizar el análisis dinámico de la estructura bajo la acción de fuerzas horizontales. Si bien tenemos varias alternativas, vamos a considerar un modelo de 4 nodos: Nodo 1: base empotrada (no tiene GDL asociados, dado que los desplazamientos y rotaciones son nulos), Nodo 2: a mitad de altura del soporte, Nodo 3: punto de conexión del soporte con el tanque y Nodo 4: en el centro de masa (CM) del tanque. El Nodo 3 se define a los efectos de representar en el modelo el cambio significativo de rigidez entre el soporte y el tanque. Este último, por sus dimensiones se considera como un elemento indeformable (rigidez muy elevada).

Una vez definidos los nodos del modelo discreto, analizaremos los GDL a asignar a cada uno de ellos, excluyendo la base del soporte que está empotrada. Se incluyen 3 GDL horizontales (u_{x1} , u_{x2} y u_{x3}) para considerar la masa del soporte (que se concentra en los nodos 2 y 3) y del tanque (que se aplica totalmente en el nudo 4). En este ejemplo, al igual que en el anterior, las masas se asignan a cada nodo según el criterio de la zona tributaria. La vibración de la estructura induce rotaciones significativas en el tanque, debido a que el soporte se comporta como una columna empotrada en la base y libre en su extremo superior. Es por ello que se considera necesario en este caso incluir también un GDL rotacional, $u_{\theta 1}$, en el nudo 3, donde se asigna el momento de inercia polar I_{OT} . Es por ello que el modelo considerado en este ejemplo presenta 4 GDL, cuya matriz de masa se indica en la Ecuación 16:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_S / 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_S / 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{OT} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Alternativamente se podrían haber adoptado modelos más refinados, por ejemplos con más grados de libertad para representar tanto el soporte como el tanque de agua, o también más simples, por ejemplo considerando un solo GDL traslacional para concentrar la masa del soporte y del tanque.

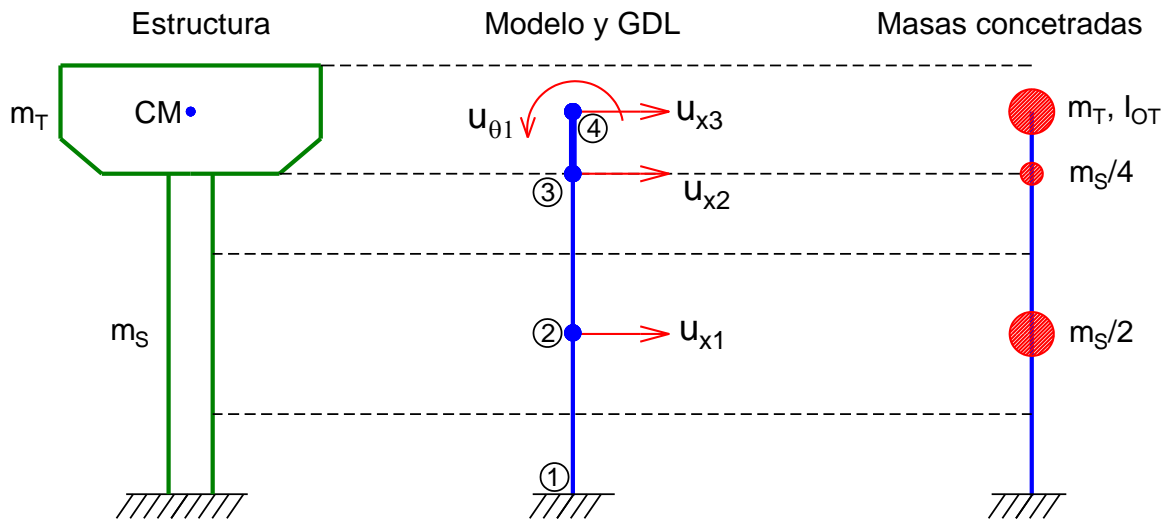


Figura 14. Modelo estructural y criterio para la concentración de masas para un ejemplo de un tanque elevado.

Es conveniente resaltar que la selección de los GDL dinámicos, a los cuales se asocian las masas del sistema, es un aspecto relevante de la modelación. El tipo, posición y cantidad de GDL deben adoptarse para representar adecuadamente la estructura. Para ello, el ingeniero estructural debe comprender el comportamiento estructural esperado y debe analizar las masas presentes y su distribución en la estructura, la dirección de las acciones dinámicas, la deformada que experimentará la estructura, etc.

4.2.2 Masas consistentes

El criterio de masas consistentes es más preciso, y la vez más complejo. Éste se basa en aplicar los mismos conceptos del método de los elementos finitos, es decir que se analiza cada uno de los elementos y se determina su matriz de masa mediante un procedimiento similar al empleado para calcular los coeficientes de la matriz de rigidez. Para ello se imponen aceleraciones unitarias en los distintos grados de libertad y se determinan los coeficientes de la matriz de masa como las fuerzas inerciales requeridas para ello. Los desplazamientos en el elemento, entre los nudos del modelo, se representan con las mismas funciones de interpolación que las usadas para formular la matriz de rigidez. Las matrices así obtenidas no son diagonales.

A los efectos de comparar el criterio de masas consistentes y concentradas, presentamos los resultados de un ejemplo numérico incluido en el texto de Clough y Penzien, 2010, correspondientes a la matriz de masa de un pórtico de 1 piso y 1 vano, cuyas columnas y viga tienen una masa por unidad de longitud igual a \bar{m} y $1.5\bar{m}$, respectivamente, ver Figura 15. Para la formulación se considera que el pórtico se modela con 3 GDL, y en el caso de la matriz de masas concentradas no

se incluyen las inercias rotacionales (dado que esa es la hipótesis usual). Ambas matrices se indican mediante las Ecuaciones 17 y 18:

Matriz de masas concentradas

$$\mathbf{m} = \frac{\bar{m}L}{210} \begin{pmatrix} 840 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Matriz de masas consistentes:

$$\mathbf{m} = \frac{\bar{m}L}{210} \begin{pmatrix} 786 & 11L & 11L \\ 11L & 26L^2 & -18L^2 \\ 11L & -18L^2 & 26L^2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

La comparación de las dos matrices nos muestra claramente las diferencias existentes. La matriz de masas concentradas contiene solo un coeficiente distinto de cero (la masa traslacional total asociada al primer GDL, $4\bar{m}L$), mientras que la de masas consistentes es una matriz llena porque considera las inercias rotacionales y el acoplamiento entre los distintos GDL.

Para completar la comparación entre masas concentradas y masas consistentes, podemos aplicar el criterio de masas concentradas, pero incluyendo las inercias rotaciones asociadas a los grados de libertad u_2 y u_3 . Para determinar la masa rotacional o momento de inercia de las masas, I_o , asociada al GDL u_2 (y con igual criterio para el GDL u_3) debemos considerar la mitad de la viga (con masa $1.5\bar{m}$) y la mitad de la columna (con masa \bar{m}), según se indica en el esquema de la Figura 16. La masa se distribuye uniformemente sobre la viga y columnas, por lo cual aplicamos la ecuación correspondiente a ese caso (ver Figura 10) de modo que:

$$I_o = \bar{m} \frac{L}{2} \frac{\left(\frac{L}{2}\right)^2}{12} + 1.5\bar{m} \frac{L}{2} \frac{L^2}{12} = \frac{13}{96} \bar{m}L^3 = \frac{28.4}{210} \bar{m}L^3 \quad (19)$$

A partir del resultado obtenido en la Ecuación 19, podemos plantear una tercera alternativa que consiste en considerar la inercia traslacional y rotacional con el criterio de masas concentradas, sin incluir el acoplamiento entre GDL (matriz diagonal):

$$\mathbf{m} = \frac{\bar{m}L}{210} \begin{pmatrix} 840 & 0 & 0 \\ 0 & 28.4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 28.4L^2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

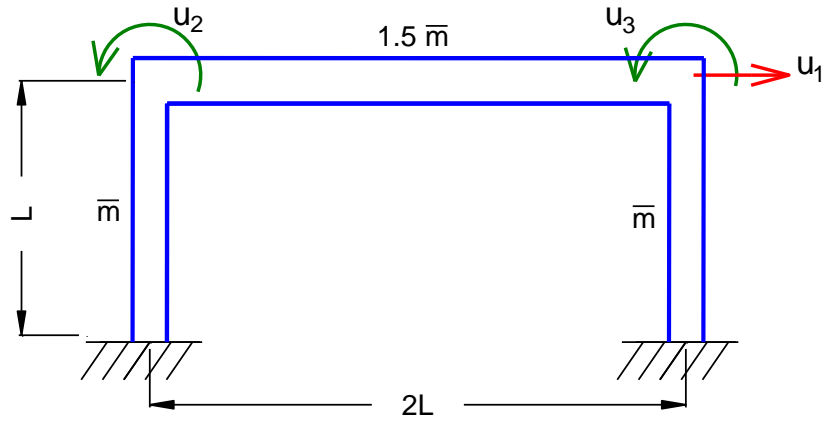


Figura 15. Pórtico de un piso modelado con 3 GDL dinámicos.

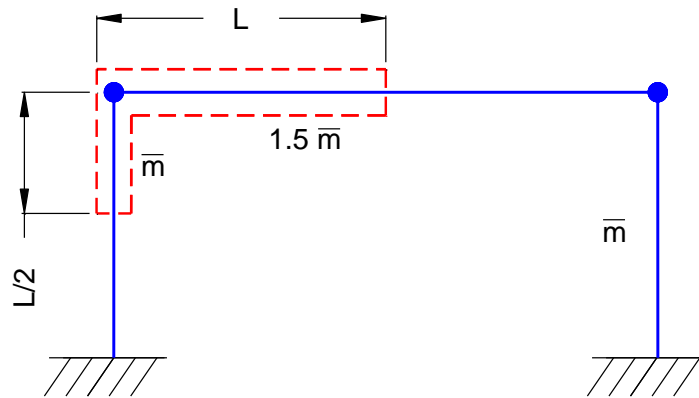


Figura 16. Criterio para determinar la inercia rotacional asociada a un nodo (para el ejemplo de la Figura 15).

El criterio de masas concentradas sin inercia rotacional es el más usual y es el que implementan normalmente los programas comerciales de análisis estructural. La precisión de este procedimiento es adecuada para la mayoría de los casos. El criterio de masas consistentes presenta ventajas en la precisión de los resultados en aquellos casos en los que las masas distribuidas en los elementos de la estructura inducen efectos importantes debido a la inercia rotacional.

4.3 Determinación de la matriz de amortiguamiento

El amortiguamiento de las vibraciones un fenómeno físico real por el cual se disipa energía a medida que la estructura que se produce se deforma por efecto de alguna acción dinámica. En este proceso, la energía se disipa mediante diversos mecanismos, tales como fricción interna del material, efectos térmicos, apertura y cierres de fisuras (en materiales como hormigón y mampostería), deslizamiento en conexiones y juntas, fricción entre la estructura y otros elementos no estructurales, como paneles, carpintería, cielorrasos, etc. Resulta prácticamente imposible identificar y modelar estos complejos mecanismos de disipación en forma realista. Es por ello que se emplea una representación idealizada, asumiendo que la disipación se produce íntegramente por

amortiguamiento viscoso lineal¹. Esta hipótesis es conveniente desde el punto de vista matemático, si bien no representa el fenómeno físico real en las estructuras (dado que es válido sólo en el caso de fluidos). Es por ello que en la formulación de la ecuación de movimiento, ver Sección 2, consideramos fuerzas de amortiguamiento que se definen como el producto del coeficiente de amortiguamiento viscoso, c , por la velocidad. El coeficiente c se expresa en unidades [Fuerza x Tiempo / Longitud].

La matriz de amortiguamiento, desde el punto de vista conceptual, puede calcularse determinando las fuerzas que se originan en los GDL de la estructura cuando se aplican una velocidad unitaria en forma alternada y sucesiva en cada uno de los GDL. En la práctica resulta muy difícil aplicar la definición previa y determinar los coeficientes de la matriz a partir de las dimensiones y propiedades mecánicas de la estructura y sus materiales. Es por ello que los valores de amortiguamiento para sistemas de N GDL se determinan a partir del factor de amortiguamiento ξ (definido para sistemas de 1 GDL como $\xi = c/c_{cr} = c/2 m \omega_n$) según distintos métodos, dependiendo del procedimiento de cálculo que se considera. Los valores del factor ξ se pueden determinar experimentalmente o bien se adoptan valores recomendados en la bibliografía y reglamentos vigentes. En las Secciones 6 y 7 analizaremos la definición de la matriz de amortiguamiento y su aplicación práctica en el análisis modal.

4.4 Condensación estática

El proceso de discretización para formular un modelo puede resultar en una subdivisión de la estructura en un elevado número de elementos, debido a los requerimientos que surgen para representar la geometría, cargas, masas y cambios en las propiedades de los materiales. Como consecuencia de ello, las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento tienen dimensiones muy grandes. Un método práctico para reducir el número de GDL del análisis dinámico es la condensación estática, que como su nombre lo indica es un procedimiento que permite reducir los GDL de la matriz de rigidez en problemas estáticos, eliminando los GDL en los que las fuerzas nodales son nulas. Matricialmente, esta condición puede expresarse como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{t0} \\ \mathbf{k}_{0t} & \mathbf{k}_{00} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

donde \mathbf{u}_0 es el vector de desplazamientos a condensar y \mathbf{u}_t es el vector de los desplazamiento. La matriz de rigidez se exprese mediante una partición en cuatro submatrices asociadas a los desplazamientos \mathbf{u}_0 y \mathbf{u}_t (lo cual se indica con el doble subíndice "0" y/o "t" según corresponda. Operando matricialmente se demuestra que:

¹ El amortiguamiento se define como la capacidad que presenta un sistema de disipar energía mediante distintos mecanismos. El amortiguamiento viscoso lineal representa un caso particular aplicable a fluidos, en el que la energía se disipa en forma directamente proporcional a la velocidad. Otra forma de amortiguamiento es el friccional, o amortiguamiento de Coulomb, producido por la fricción de dos partes o cuerpos que se mueven en contacto uno con respecto al otro.

$$\widehat{\mathbf{k}}_{tt} \mathbf{u}_t = \mathbf{p} \quad (22)$$

$$\widehat{\mathbf{k}}_{tt} = \mathbf{k}_{tt} - \mathbf{k}_{0t}^T \mathbf{k}_{00}^{-1} \mathbf{k}_{t0} \quad (23)$$

La matriz $\widehat{\mathbf{k}}_{tt}$ es la matriz de rigidez condensada, la cual vincula los desplazamientos \mathbf{u}_t con el vector de acciones \mathbf{p} . Las Ecuaciones 22 y 23 indican que la condensación estática permite que los GDL \mathbf{u}_0 no se incluyan en el análisis (reducción de GDL), sin embargo su efecto en la matriz de rigidez es tenido en cuenta. Es decir que la condensación estática no es equivalente a la simple eliminación de GDL en la ecuación matricial (esto implicaría considerar que $\widehat{\mathbf{k}}_{tt} = \mathbf{k}_{tt}$, lo cual no es válido). Se puede demostrar que la condensación estática es válida también cuando las fuerzas asociadas a los desplazamientos \mathbf{u}_0 no son nulas.

El texto de Chopra, 2010, indica que el proceso de condensación estático puede aplicarse también a problemas dinámicos cuando el modelo cuenta con GDL en los que no hay ni masas ni fuerzas aplicadas (los desplazamientos \mathbf{u}_0). En este caso se tiene que (sin considerar la matriz de amortiguamiento por razones de simplicidad en la demostración):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{m}_{tt} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \ddot{\mathbf{u}}_0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{tt} & \mathbf{k}_{t0} \\ \mathbf{k}_{0t} & \mathbf{k}_{00} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_t \\ \mathbf{u}_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}(t) \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Operando matricialmente en forma similar al caso anterior se demuestra que:

$$\mathbf{m}_{tt} \ddot{\mathbf{u}}_t + \widehat{\mathbf{k}}_{tt} \mathbf{u}_t = \mathbf{p}(t) \quad (25)$$

donde la matriz de rigidez condensada $\widehat{\mathbf{k}}_{tt}$ se define en la Ecuación 23. En la bibliografía (ver Paz, 1991, o Chopra, 2010) se puede encontrar la demostración completa y ejemplos numéricos.

La condensación estática es un procedimiento simple de implementar, si bien puede conducir a errores significativos en casos donde la matriz de masa no es diagonal y las fuerzas de inercia asociadas a los GDL que se condensan no son nulas (como se asume al formular la Ecuación 24). Por esta razón, Paz, 2010, desarrolló un procedimiento iterativo, denominado condensación dinámica, que permite reducir los grados de libertad aun cuando tengan masas asociadas que no son nulas.

5. ACCIÓN SÍSMICA

5.1 Formulación de la ecuación de equilibrio dinámico

El análisis dinámico con acción sísmica es un caso particular en el que la vibración es producida por una fuerza dinámica aplicada sobre la estructura. Es por ello que debemos reformular las Ecuaciones 2 y 4 considerando que la estructura está sometida a un movimiento de los soportes (fundaciones), y que este movimiento varía en el tiempo. Vamos a considerar una estructura de varios grados de libertad, por ejemplo, el pórtico plano de 5 pisos que se muestra en la Figura 17, y suponemos que todos los soportes experimentan, por acción del sismo, un cierto desplazamiento $u_g(t)$. En un instante t cualquiera, el movimiento que se produce en cada uno de los grados de libertad del

sistema (desplazamiento horizontal en cada uno de los pisos, para el ejemplo de Figura 17), el desplazamiento total u^t puede descomponerse en un movimiento de cuerpo rígido de la estructura debido al desplazamiento del suelo u_g , y un desplazamiento relativo, u , debido a la deformación del sistema estructural. En otras palabras, el desplazamiento total es igual a la suma del desplazamiento de suelo y del desplazamiento relativo.

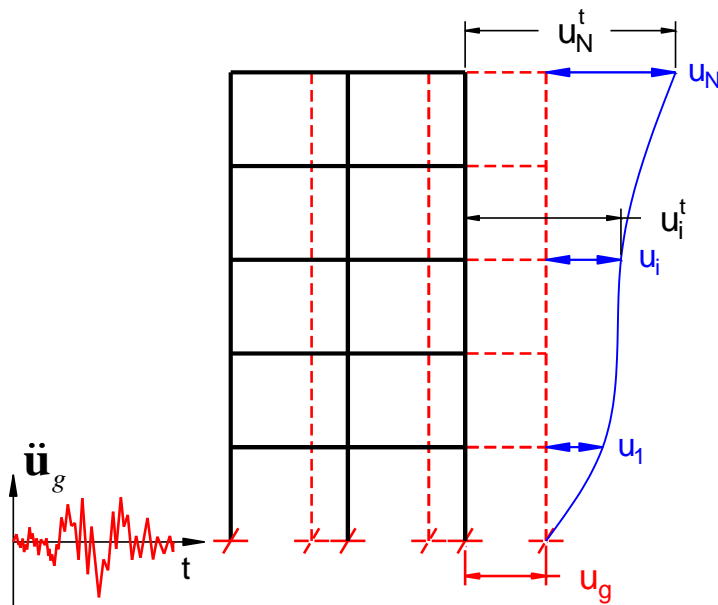


Figura 17. Definición del desplazamiento del terreno, u_g , desplazamiento relativo, u , y desplazamiento total, u^t , tomando como ejemplo un pórtico plano con 5 grados de libertad dinámicos.

A partir de las consideraciones expuestas, el vector de desplazamientos totales, \mathbf{u}^t y sus derivadas respecto del tiempo, velocidad y aceleración total, $\dot{\mathbf{u}}^t$ y $\ddot{\mathbf{u}}^t$, puede expresarse matemáticamente como:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^t(\mathbf{t}) &= \mathbf{u}(\mathbf{t}) + \mathbf{1} u_g(t) \\ \dot{\mathbf{u}}^t(\mathbf{t}) &= \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) + \mathbf{1} \dot{u}_g(t) \\ \ddot{\mathbf{u}}^t(\mathbf{t}) &= \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{t}) + \mathbf{1} \ddot{u}_g(t)\end{aligned}\tag{26}$$

donde $u_g(t)$ es el desplazamiento del terreno producido por el terremoto e $\mathbf{1}$ es un vector de influencia cuyo significado y determinación se explica luego en esta misma sección. Es importante realizar dos aclaraciones. El superíndice “t” se usa para definir el vector de desplazamientos totales, y no debe confundirse con que es un vector traspuesto). El desplazamiento del terreno $u_g(t)$ y sus derivadas no son vectores, sino que son funciones escalares. Ello es así porque se supone que todos los soportes de la estructura experimentan el mismo movimiento y ese movimiento se representa mediante una única componente. Esta simplificación es suficientemente aproximada para la mayoría de los casos usuales. En ciertas situaciones es necesario considerar que el movimiento del terreno se representa mediante varias componentes (este caso se desarrolla en la Sección 5.2) o estructuras de gran desarrollo lineal, como puentes largos o tuberías, donde el movimiento en los

soportes es diferente (este caso de excitación multisoporte se plantea en la Sección 5.3 de esta guía).

La ecuación de equilibrio dinámico, planteada en forma general en la Ecuación 2, se modifica en este caso particular porque la fuerza exterior es nula:

$$\mathbf{f}_I + \mathbf{f}_D + \mathbf{f}_S = 0 \quad (27)$$

Sin embargo, hay que analizar detenidamente el valor de las fuerzas internas que intervienen en la Ecuación 27 para este caso particular. Las fuerzas elásticas y de amortiguamiento viscoso depende del desplazamiento relativo, \mathbf{u} , y de la velocidad, $\dot{\mathbf{u}}$, debido a que estas fuerzas se producen en la medida de que la estructura se deforme ($\mathbf{u} \neq 0$); si se produce un movimiento de cuerpo rígido ($\mathbf{u} = 0$) son nulas. Las fuerzas de inercia dependen de la aceleración total, $\ddot{\mathbf{u}}$, porque se generan sobre las masas en función de la aceleración que éstas experimentan. En otras palabras, las masas “perciben” la aceleración total, independientemente que se deban a un desplazamiento de cuerpo rígido o a la deformación interna de la estructura. A partir de estas consideraciones, la Ecuación 27 puede escribirse como:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (28)$$

Reemplazando el vector de aceleraciones totales, según se indica en la Ecuación 26, y reordenando obtenemos la ecuación de equilibrio dinámico para este caso:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m} \boldsymbol{\iota} \ddot{u}_g(t) \quad (29)$$

La Ecuación 29 indica que el efecto de la acción sísmica (movimiento del suelo originado por las ondas sísmicas) es equivalente a una fuerza efectiva que depende de la masa de la estructura y de la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$:

$$\mathbf{p}_{ef}(\mathbf{t}) = -\mathbf{m} \boldsymbol{\iota} \ddot{u}_g(t) \quad (30)$$

La aceleración $\ddot{u}_g(t)$ no es una incógnita del problema, por el contrario, es una función conocida que por su complejidad no puede expresarse mediante una función matemática sino como una serie de valores numéricos, que se denomina registro de aceleración o acelerograma. Éstos se obtienen a partir de mediciones instrumentales realizadas durante un sismo real o bien se generan artificialmente mediante la aplicación de distintos algoritmos matemáticos.

El vector $\boldsymbol{\iota}$ representa la influencia o incidencia de la aceleración del terreno en los distintos GDL dinámicos del sistema; los valores de sus componentes pueden definirse como los desplazamientos medidos en cada uno de los grados de libertad de la estructura cuando se aplica estáticamente un desplazamiento unitario en la dirección de la acción sísmica considerada (movimiento de los apoyos). A modo de ejemplo, la Figura 18 muestra un pórtico de cuatro niveles y otro de tres niveles con un voladizo, ambos sometidos a acciones sísmicas horizontales y modelados con 4 grados de libertad dinámicos. En la Ecuación 31 se indican los vectores $\boldsymbol{\iota}$ para los dos casos considerados.

$$\text{Caso (a): } \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{Caso (b): } \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

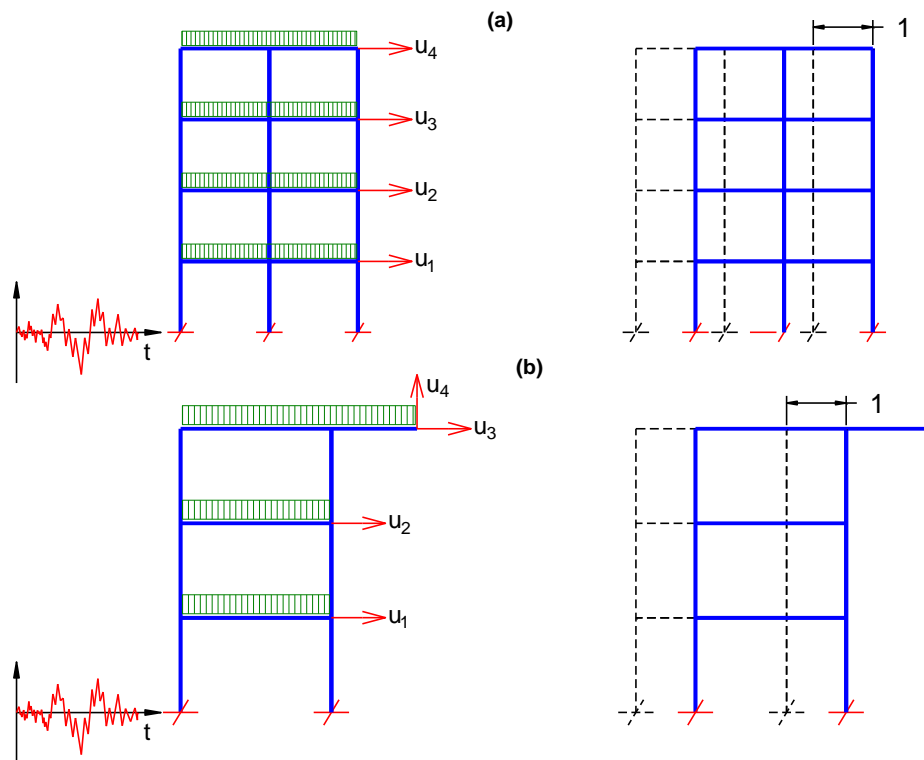


Figura 18. Ejemplos para la determinación de los vectores de influencia \mathbf{v} en un pórtico plano.

5.2 Excitación multicomponente

En la sección anterior desarrollamos la ecuación de equilibrio dinámico para el caso en que la acción sísmica se representa mediante un registro de aceleración en una dirección determinada. Es importante recordar que el movimiento real de suelo durante un terremoto es complejo y se produce en cualquier dirección, razón por la cual los acelerómetros miden de aceleración según tres direcciones perpendiculares entre sí. Usualmente, el instrumento se dispone de manera tal que registran según dos direcciones ubicadas en un plano horizontal y una tercera en según la vertical del lugar. Es por ello que resulta necesario en ciertos casos definir la ecuación que permite considerar el caso de excitación sísmica con dos o más componentes. Para este caso, la fuerza efectiva $\mathbf{p}_{ef}(t)$ resulta igual a la suma del aporte de cada una de las componentes, de modo que:

$$\mathbf{p}_{ef}(t) = -\mathbf{m} \sum_{k=1}^{N_c} \mathbf{v}_k u_{gk}(t) = -\mathbf{m} \mathbf{v} \mathbf{u}_g(t) \quad (32)$$

donde N_c es el número de componentes a considerar, \mathbf{v} es una matriz que contiene los N_c vectores de influencia y $\mathbf{u}_g(t)$ es un vector con las N_c componentes de la aceleración. En el caso particular de que se considere una estructura sometida a la acción simultánea de las tres componentes registradas usualmente en un terremoto $N_c=3$:

$$\ddot{\mathbf{u}}_g(\mathbf{t}) = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{g1}(t) \\ \ddot{u}_{g2}(t) \\ \ddot{u}_{g3}(t) \end{Bmatrix} \quad (3 \times 1) \quad (33)$$

$$\mathbf{v} = [\{\mathbf{v}_1\} \quad \{\mathbf{v}_2\} \quad \{\mathbf{v}_3\}] \quad (\mathbf{N} \times 3) \quad (34)$$

La Figura 19 presenta un ejemplo de una estructura plana, que se modela con 3 GDL dinámicos, y que se encuentra sometida a la acción sísmica representada por dos componentes (en la dirección horizontal y vertical).

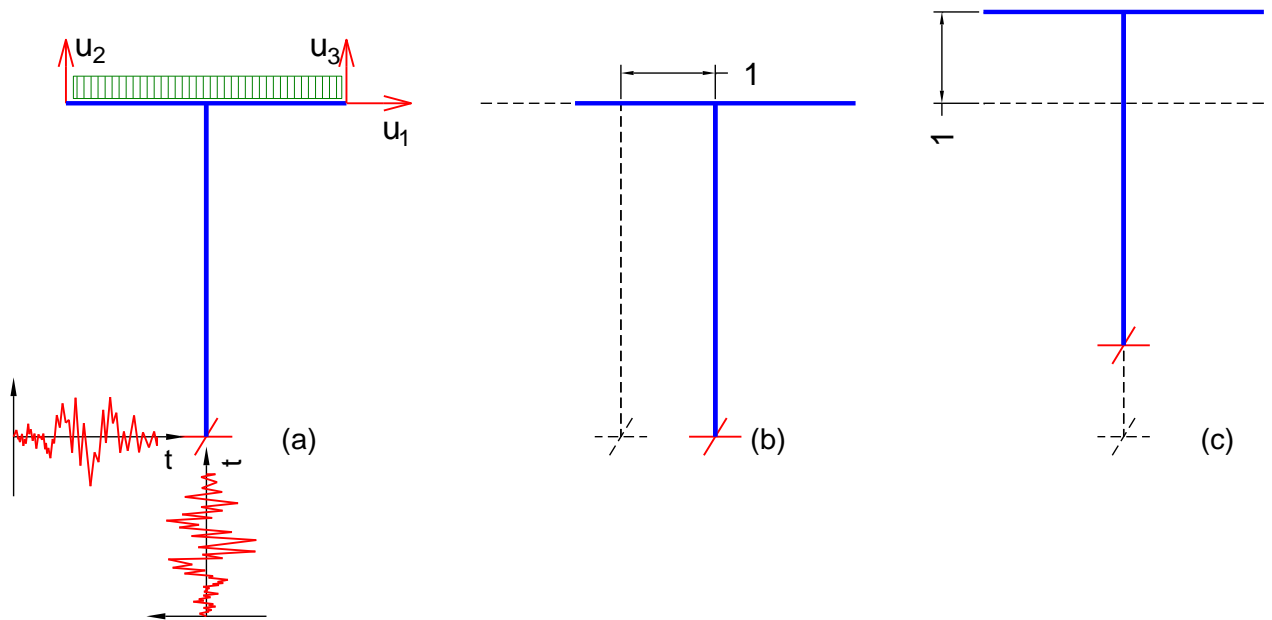


Figura 19. Ejemplo de una estructura simple con 3 grados de libertad dinámicos, (a) modelo estructural, (b) y (c) aplicación de desplazamientos unitarios de cuerpo rígido para el cálculo de los vectores \mathbf{v} .

Para determinar los vectores de influencia \mathbf{v} para este caso, aplicamos la definición y damos un desplazamiento unitario de cuerpo rígido en las dos direcciones consideradas. Al aplicar el desplazamiento unitario horizontal en el soporte, el GDL u_1 experimenta el mismo desplazamiento aplicado, mientras que en la dirección de u_2 y u_3 el movimiento es nulo. Con igual criterio aplicamos un desplazamiento unitario vertical y así obtenemos los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ o la matriz \mathbf{v} :

$$\text{Vectores: } \mathbf{v}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{Matriz: } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (35)$$

5.3 Excitación multisoporte

En las Secciones 5.1 y 5.2 hemos formulado las ecuaciones de equilibrio dinámico considerando que todos los soportes de la estructura están sometidos al mismo movimiento, esto es que en todos los vínculos se aplica el mismo registro de aceleración (o registros en el caso de excitación

multicomponente). En otras palabras, consideramos en esos casos una traslación de base rígida. Sin embargo, en algunas situaciones especiales de estructuras con desarrollo longitudinal, puentes largos por ejemplo, es necesario considerar el caso en que los soportes de la estructura están sometidos a movimientos diferentes.

Consideremos el ejemplo que se ilustra en la Figura 20, donde la estructura se modela con N GDL dinámicos (desplazamientos no restringidos) y se consideran además Ns soportes o vínculos, en cada uno de los cuales el movimiento del suelo es diferente. La ecuación de equilibrio la formularemos a partir de la Ecuación 28, considerando en este caso particular los GDL definidos previamente y particionando las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, de forma que sean coherentes con el vector de desplazamiento y sus derivadas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} & \mathbf{m}_g \\ \mathbf{m}_g^T & \mathbf{m}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}^t \\ \ddot{\mathbf{u}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{c}_g \\ \mathbf{c}_g^T & \mathbf{c}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^t \\ \dot{\mathbf{u}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k} & \mathbf{k}_g \\ \mathbf{k}_g^T & \mathbf{k}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{p}_g(\mathbf{t}) \end{Bmatrix} \quad (36)$$

donde $\mathbf{p}_g(\mathbf{t})$ es el vector de fuerzas en los soportes de la estructura, \mathbf{u}_g es el vector de desplazamientos en los soportes y \mathbf{u}^t es el vector de desplazamientos totales de los GDL no restringidos (recordar que \mathbf{u} representa el vector de desplazamientos relativos, ver Sección 5.1).

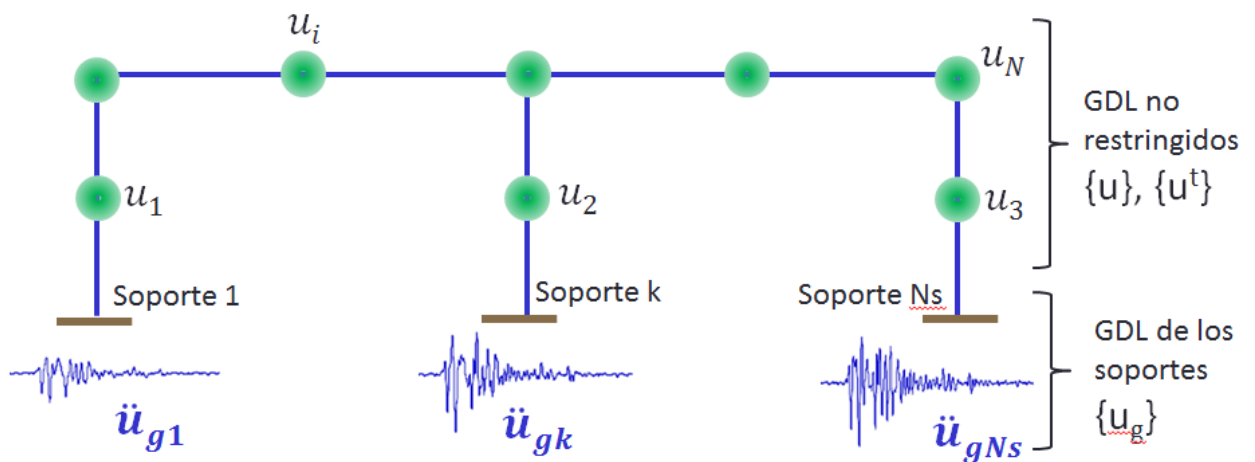


Figura 20. Ejemplo de una estructura con excitación multisoporte. Definición de los desplazamientos $\{\mathbf{u}\}$ y $\{\mathbf{u}_g\}$.

La Ecuación 36 representa un sistema de N+Ns ecuaciones diferenciales, donde las incógnitas son el vector de desplazamiento asociado a los GDL no restringidos (\mathbf{u}, \mathbf{u}^t) y las fuerzas en los soportes $\mathbf{p}_g(\mathbf{t})$. El vector de desplazamiento de los soportes \mathbf{u}_g y sus derivadas son conocidos. El vector de fuerzas asociados a los GDL no restringidos es nulo porque suponemos que no hay fuerzas exteriores actuando sobre los mismos, solo se considera el movimiento sísmico en los apoyos.

Aplicando el mismo criterio que usado en la Sección 5.1, el vector de desplazamientos se puede separar en dos partes, representando la primera el movimiento del terreno, \mathbf{u}_g ($N_s \times 1$), y la segunda el desplazamiento relativo debido a la deformación de la estructura, \mathbf{u} ($N \times 1$):

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

Es importante aclarar que en este caso la matriz de influencia \mathbf{I} ($N \times N_s$, formada por N_s vectores \mathbf{I}_k) representa, como se definió en la sección 5.1, la influencia de la aceleración del terreno en los distintos GDL dinámicos del sistema. Sin embargo, la diferencia en este caso radica en que cuando se aplican en forma alternada y sucesiva un desplazamiento unitario en cada soporte en los restantes el desplazamiento es nulo. Reemplazando la Ecuación 37, y sus derivadas, en la 36 y considerando solamente la parte de la ecuación matricial relacionada con los grados de libertad no restringidos:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{m}_g\ddot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{m}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{c}_g\dot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{c}\mathbf{u} + \mathbf{k}\mathbf{u}_g + \mathbf{k}_g\mathbf{u}_g + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (38)$$

Agrupando los términos vinculados al vector incógnita \mathbf{u} y los términos independientes obtenemos:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{p}_{ef}(\mathbf{t}) \quad (39)$$

donde

$$\mathbf{p}_{ef}(\mathbf{t}) = -(\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{m}_g\ddot{\mathbf{u}}_g) - (\mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_g + \mathbf{c}_g\dot{\mathbf{u}}_g) - (\mathbf{k}\mathbf{u}_g + \mathbf{k}_g\mathbf{u}_g) \quad (40)$$

Se puede demostrar (para más detalles ver Sección 9.7 del libro de Chopra, 2010) que en los casos usuales la Ecuación 40 puede simplificarse, de modo que:

$$\mathbf{p}_{ef}(\mathbf{t}) = -\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_g(\mathbf{t}) \quad (41)$$

donde

$$\mathbf{I} = -\mathbf{k}^{-1}\mathbf{k}_g \quad (42)$$

En conclusión, para el caso de excitación multisoporte la ecuación de equilibrio dinámico es equivalente a la de excitación simple (Sección 5.1), con la diferencia de que el vector de fuerzas efectivas $\mathbf{p}_{ef}(\mathbf{t})$ ($N \times 1$) depende de la matriz de influencia \mathbf{I} ($N \times N_s$) y del vector de aceleraciones en los soportes $\ddot{\mathbf{u}}_g(\mathbf{t})$ ($N_s \times 1$).

Finalmente, podríamos considerar el caso de una estructura, como la indicada en la Figura 20, donde la componente de la excitación no solo es diferente en cada uno de los soportes, sino que además incluye 2 o más componentes para definir el movimiento sísmico. Ello implicaría combinar las Ecuaciones 32 y 41 incluyendo N_s soportes con excitación diferente, cada uno con N_c componentes. Por razones de simplicidad, y dado que representa un caso poco usual en la práctica, no plantearemos las ecuaciones para esta situación particular.

6. VIBRACIÓN LIBRE

6.1 Sistemas sin amortiguamiento, $c=0$

6.1.1 Solución de la ecuación de equilibrio dinámico

En la sección precedente planteamos la ecuación de equilibrio dinámico para la consideración de la acción sísmica en distintos casos. En esta sección vamos a resolver la ecuación para el caso más simple, esto es vibración libre, donde $\mathbf{p}(t)=\mathbf{0}$ y la vibración la origina una perturbación inicial, considerando además que el amortiguamiento es nulo, $\mathbf{c}=\mathbf{0}$, de modo que:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (43)$$

El problema consiste en determinar las condiciones bajo las cuales la ecuación de equilibrio, Ecuación 43, se satisface, considerando en el tiempo $t=0$ un desplazamiento inicial, $\mathbf{u}=\mathbf{u}(0)$, y/o una velocidad inicial, $\dot{\mathbf{u}}=\dot{\mathbf{u}}(0)$. Para ello, podemos considerar por analogía con el caso de vibración libre de sistemas de 1 GDL, que el vector de desplazamientos, \mathbf{u} , está definido por un vector $\boldsymbol{\phi}$ que determina la amplitud del movimiento en cada uno de los GDL considerados y por una función armónica $q(t)$ que define la variación temporal de la vibración libre:

$$\{\mathbf{u}\} = \{\boldsymbol{\phi}\} q(t) \quad \equiv \quad \mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} q(t) \quad (44)$$

$$q(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (45)$$

En la Figura 21 se muestra una estructura genérica con N GDL dinámicos y además se representa gráficamente el vector de amplitud y la función temporal usadas en la Ecuación 44 para definir el vector de desplazamientos \mathbf{u} .

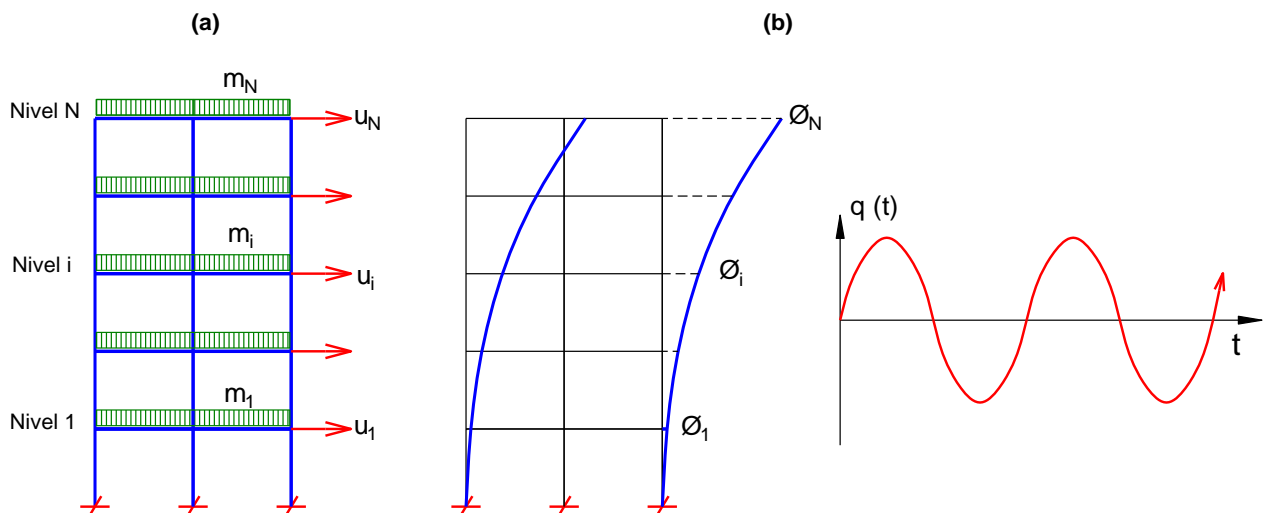


Figura 21. (a) Estructura de N GDL, y (b) interpretación gráfica del vector $\boldsymbol{\phi}$ y de la función temporal $q(t)$.

Para calcular el vector de aceleraciones derivamos la Ecuación 44 dos veces respecto del tiempo

(considerando que el vector ϕ es una constante a los efectos de la derivación):

$$\ddot{\mathbf{u}} = \phi \ddot{q}(t) = -\omega^2 \phi q(t) \quad (46)$$

Reemplazando las Ecuaciones 44 y 46 en la 43 obtenemos:

$$-\omega^2 [m] \{\phi\} q(t) + [k] \{\phi\} q(t) = \{0\} \quad \equiv \quad -\omega^2 \mathbf{m} \phi q(t) + \mathbf{k} \phi q(t) = \mathbf{0} \quad (47)$$

y reordenando:

$$[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \phi q(t) = \mathbf{0} \quad (48)$$

La Ecuación 48 se puede satisfacer bajo dos condiciones: una considerando que $q(t)=0$, lo cual implica que en todo momento la vibración es nula, mientras que la segunda condición implica que se debe cumplir:

$$[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \phi = [\mathbf{k} - \lambda \mathbf{m}] \phi = \mathbf{0} \quad (49)$$

La resolución de la Ecuación 49 constituye un problema de álgebra lineal, que implica determinar los autovalores o valores propios, el escalar λ , y los autovectores o vectores propios ϕ . A partir de ellos se puede encontrar la solución para el caso de vibración libre sin amortiguamiento, considerando además las condiciones de borde (desplazamiento y/o velocidad inicial) para determinar las constantes de integración A y B, según se definen en la Ecuación 45.

El estudio de la vibración libre como una condición de carga no presenta interés práctico para la ingeniería estructural, razón por lo cual no completaremos el desarrollo de la solución (esta solución puede encontrarse en la bibliografía). Sin embargo, el estudio de este caso sirve para explicar conceptualmente el significado de las formas modales y frecuencias propias. Desde un punto de vista matemático, las formas modales son los autovectores del sistema que satisfacen la Ecuación 49. Si aplicamos en una estructura sin amortiguamiento una perturbación inicial cualquiera $\mathbf{u}(0)$, $\dot{\mathbf{u}}(0)$, Figura 22(a), se origina una vibración libre donde los desplazamientos en los distintos GDL varían en el tiempo según una función periódica (esto es que se repite con un periodo T). Esa variación puede ser más o menos compleja según sea la perturbación inicial aplicada, Figura 22(b). El movimiento de la estructura en un instante dado puede determinarse mediante la superposición de movimientos armónicos simples cuya amplitud está definida por las formas modales ϕ . La frecuencia angular de esos movimientos es igual a los valores propios ω (o periodo de vibración $T=2\pi/\omega$).

Las formas modales presentan también un significado físico, que podemos explicar así: si aplicamos a la estructura una perturbación inicial con desplazamientos iguales a una forma modal, Figura 23(a), la estructura vibrará con un movimiento armónico simple, Figura 23(b), con frecuencia angular igual a la frecuencia propia del modo. La amplitud del movimiento en cada uno de los GDL está dada por la forma modal ϕ .

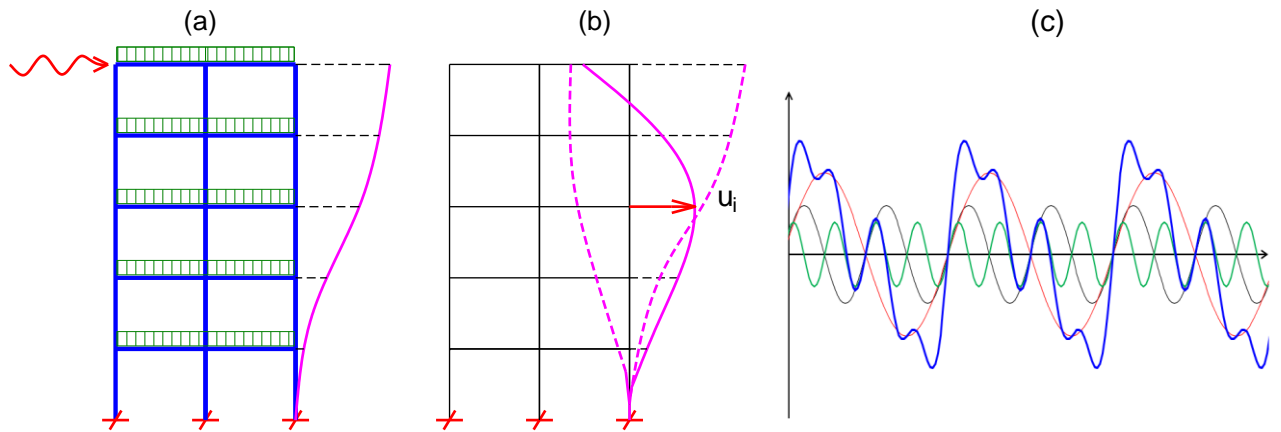


Figura 22. Vibración libre de una estructura sin amortiguamiento originada por una perturbación inicial.

6.1.2 Formas modales, frecuencias y periodos

La Ecuación 49 representa un sistema de N ecuaciones lineales homogéneas porque todos los términos independientes son nulos. La solución trivial de este sistema, $\phi=0$, no es relevante desde el punto de vista físico porque implica que no hay vibración de la estructura, debido a que la amplitud del movimiento sería nula. Es por ello que buscamos la solución no trivial, la cual existe si el determinante del sistema es nulo, esto es:

$$\det(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}) = \det(\mathbf{k} - \lambda \mathbf{m}) = 0 \quad (50)$$

La Ecuación 50 se denomina ecuación característica del sistema o ecuación de frecuencias y permite, cuando se expande el determinante, obtener una ecuación polinómica de orden N , cuyas raíces λ representa el cuadrado de la frecuencia de vibración ω . Se puede demostrar que, para un sistema estructural estable, cuyas matrices de masa y rigidez son simétricas y definidas positivas, las N raíces de la Ecuación 50 son reales y positivas. La matriz de rigidez \mathbf{k} es positiva definida para las estructuras de construcciones civiles, debido a que las condiciones de vínculos deben ser tales que evitan cualquier movimiento de cuerpo rígido, esto es la estructura es isostática o hiperestática. En el caso de la matriz \mathbf{m} , la condición de positiva definida queda asegurada porque todos los valores de la diagonal principal son mayores a cero, dado que cualquier GDL con masa nula debe ser previamente eliminado por condensación estática.

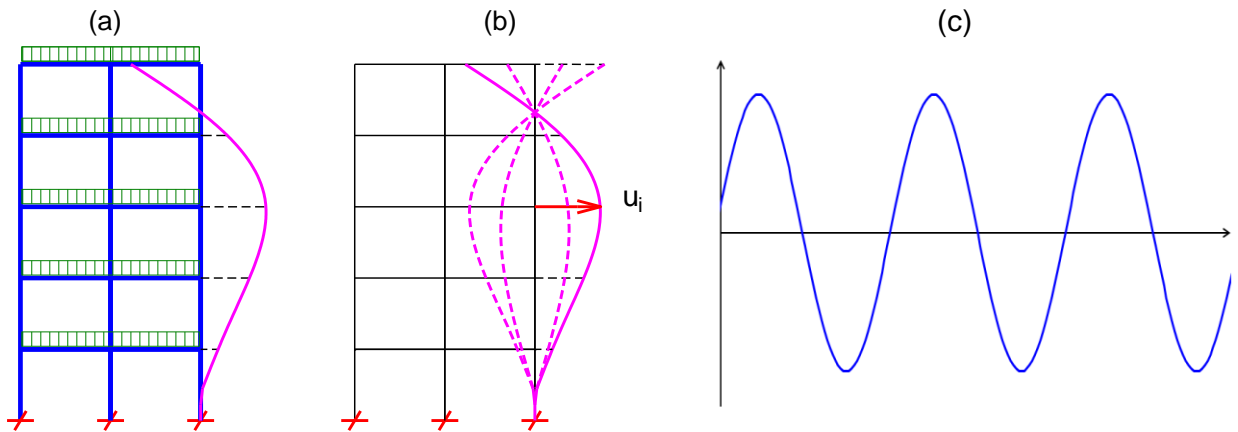


Figura 23. Vibración libre de una estructura sin amortiguamiento originada por una perturbación inicial con desplazamientos iguales a una forma modal.

Las frecuencias modales pueden agruparse en un vector, ω , en el cual convencionalmente los valores se ordenan en forma creciente:

$$\omega = \{\omega\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_1 \\ \dots \\ \omega_j \\ \dots \\ \omega_N \end{array} \right\} \quad (51)$$

Alternativamente, las frecuencias al cuadrado (esto es los valores de λ) pueden disponerse en una matriz diagonal denominada matriz espectral:

$$\Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \dots & & \\ & & \omega_j^2 & \\ & & & \dots \\ & & & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (52)$$

A cada frecuencia modal, ω_j , le corresponde un periodo natural de vibración, que puede calcularse mediante la expresión:

$$T_j = \frac{2\pi}{\omega_j} \quad (53)$$

Como es usual ordenar las frecuencias en orden creciente, los correspondientes periodos naturales resultan ordenados en forma decreciente del modo 1 hasta el N.

Una vez calculados los autovalores, se puede resolver la Ecuación 49 reemplazando en forma sucesiva los valores de $\lambda_j = \omega_j^2$ para determinar los autovectores, ϕ_j , que en este problema de dinámica estructural se denominan modos naturales de vibración o formas modales. Los N modos naturales de vibración pueden agruparse en una matriz que se denomina matriz modal:

$$\Phi = \left[\left\{ \phi \right\}_1 \quad \dots \quad \left\{ \phi \right\}_j \quad \dots \quad \left\{ \phi \right\}_N \right] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \dots & \phi_{1j} & \dots & \phi_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{j1} & \dots & \phi_{jj} & \dots & \phi_{jN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{N1} & \dots & \phi_{Nj} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \quad (54)$$

A partir de la definición de la de la matriz espectral (Ecuación 52) y de la matriz modal (Ecuación 54), la Ecuación 49 puede expresarse como:

$$\mathbf{k}\Phi = \mathbf{m}\Phi\Omega^2 \quad (55)$$

Es importante aclarar que no puede determinarse la amplitud de los vectores ϕ_j en forma absoluta porque existen infinitas soluciones al problema representado por la Ecuación 49. Sin embargo, nos interesa determinar los valores relativos de las componentes de cada vector ϕ_j , esto es la forma de los vectores. Esto implica que si el vector ϕ_j es una forma modal, cualquier otro vector proporcional a ϕ_j es esencialmente la misma forma modal, dado que también satisface la Ecuación 49. De modo que las formas modales pueden multiplicarse por un factor escalar, por ejemplo, para que el valor mayor de cada vector sea igual a la unidad. Este proceso se denomina **normalización** y pueden aplicarse distintos criterios, según convenga en cada caso. En la implementación computacional es usual normalizar los autovectores de modo que se cumpla:

$$\phi_j^T \mathbf{m} \phi_j = 1 \quad \Phi^T \mathbf{m} \Phi = \mathbf{I} \quad (56)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad. En este caso las formas modales están normalizadas con respecto a la masa y se cumple, además, que:

$$\phi_j^T \mathbf{k} \phi_j = \omega_j^2 \quad \Phi^T \mathbf{k} \Phi = \Omega^2 \quad (57)$$

Es importante aclarar que el proceso de normalización modifica numéricamente los autovectores, pero el resultado final del análisis modal es independiente de ese proceso. Es decir que se trata de los mismos autovectores, pero expresados en distintas formas, según resulte más conveniente.

Para completar la explicación sobre las formas modales se muestran en la Figura 24 las correspondientes a un pórtico de 3 pisos, el que fue modelado en el programa SAP2000 considerando 3 GDL horizontales (uno en cada nivel del pórtico). Los valores numéricos de las formas modales se presentan mediante la matriz modal:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.2545 & 0.5343 & 0.3740 \\ 0.4509 & 0.1459 & -0.5154 \\ 0.5442 & -0.4945 & 0.3361 \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0.4677 & 1.0 & 0.7256 \\ 0.8270 & 0.2731 & -1.0 \\ 1.0 & -0.9255 & 0.6521 \end{bmatrix}$$

donde la primera matriz está normalizada con respecto a la masa (según la calcula el programa utilizado) mientras la segunda se ha normalizado para que el valor mayor de cada modo sea igual a 1. Ambas matrices son equivalentes.

Al inicio de esta sección explicamos, en forma conceptual, el procedimiento directo para determinar las N frecuencias de vibración, ω_j , y sus correspondientes formas modales, ϕ_j , el cual se basa en la expansión del determinante de la ecuación característica. Este procedimiento no es de aplicación práctica, particularmente para estructuras con un número elevado de GDL, porque resulta lento y poco eficiente. Es por ello que se aplican distintos métodos cuyo estudio es tema del cálculo numérico y su explicación escapa a los alcances de este trabajo. Los programas de análisis estructural incluyen rutinas para el cálculo eficiente de los autovectores, al igual que otros programas generales para realizar cálculos matemáticos, tales como Mathcad, Matlab, Octave, etc.

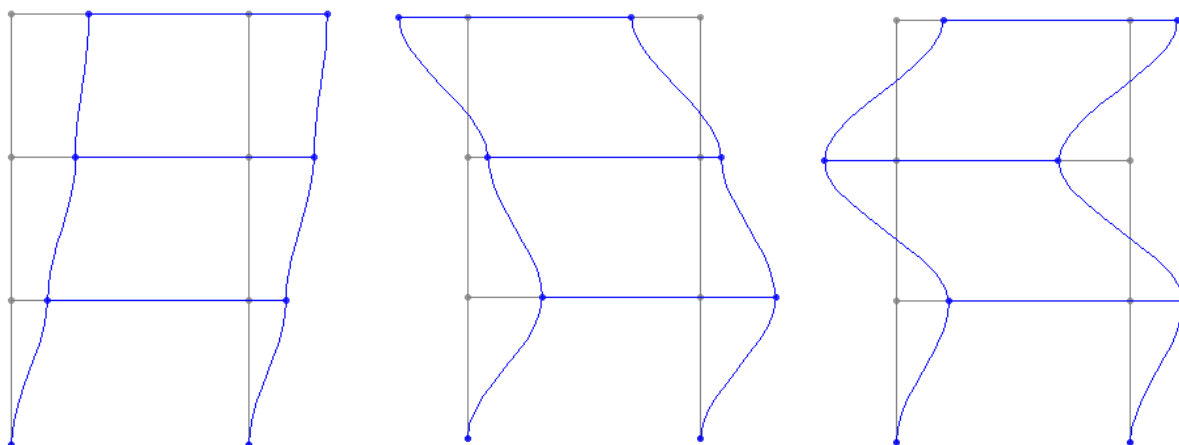


Figura 24. Formas modales correspondientes a un pórtico de 3 pisos modelado con 3GDL horizontales.

6.1.3 Condiciones de ortogonalidad de las formas modales

Los autovectores asociados a autovalores diferentes son ortogonales entre sí, es decir que su producto escalar es nulo. Estos vectores son linealmente independientes y por lo tanto constituyen una base ortogonal. La demostración de estas propiedades es un tema de álgebra lineal y no se presentan en este trabajo.

Adicionalmente, los modos de vibración (que son autovectores) presentan propiedades particulares que resultan útiles en dinámica estructural, dado que constituye el fundamento del método de análisis modal. Estas propiedades, definen condiciones de ortogonalidad de los vectores modales con respecto a las matrices de masa y rigidez, y matemáticamente se expresan como:

$$\{\phi\}_j^T [m] \{\phi\}_k = 0 \quad \equiv \quad \phi_j^T \mathbf{m} \phi_k = 0 \quad j \neq k \quad (58)$$

$$\{\phi\}_j^T [k] \{\phi\}_k = 0 \quad \equiv \quad \phi_j^T \mathbf{k} \phi_k = 0 \quad j \neq k \quad (59)$$

Las Ecuaciones 58 y 59 pueden demostrarse a partir de aplicar la Ley de Betty², considerando las

² Si sobre una estructura actúan dos sistemas de carga independientes, P y Q, la Ley de Betty establece que el trabajo interno realizado por el sistema de cargas P en los desplazamientos producidos por el sistema Q es igual al trabajo

deformadas correspondientes a dos formas modales cualquiera, j y k . Esta demostración puede encontrarse en la bibliografía y no se incluye en este trabajo. En el caso particular de un sistema que presenta dos modos de vibración con la misma frecuencia, las condiciones de ortogonalidad no se verifican para esos dos modos.

A partir de las propiedades de ortogonalidad definidas por las Ecuaciones 58 y 59 se puede demostrar que:

$$[\phi]^T [m][\phi] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & M_N \end{bmatrix} \equiv \phi^T \mathbf{m} \phi = \text{diag}(\mathbf{M}) \quad (60)$$

$$[\phi]^T [k][\phi] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_N \end{bmatrix} \equiv \phi^T \mathbf{k} \phi = \text{diag}(\mathbf{K}) \quad (61)$$

donde \mathbf{M} y \mathbf{K} son matrices diagonales. También puede demostrarse, a partir de la Ecuación 55 que:

$$\mathbf{K} = \Omega^2 \mathbf{M} \quad (62)$$

y como \mathbf{K} y \mathbf{M} son diagonales se tiene que:

$$K_j = \omega_j^2 M_j \quad (63)$$

6.2 Sistemas con amortiguamiento, $c \neq 0$

En la Sección 6.1 consideramos el caso de vibración libre de un sistema con amortiguamiento nulo, y a partir de esa condición obtuvimos las ecuaciones que permiten determinar las frecuencias y formas modales. En el caso de sistemas amortiguados, la ecuación de equilibrio dinámico en vibración libre es:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (64)$$

La resolución de la Ecuación 64 puede plantearse mediante un procedimiento análogo al aplicado para el caso sin amortiguamiento (ver Sección 6.1.1), para luego determinar las constantes de integración imponiendo las condiciones de borde del problema, que en este caso son el desplazamiento y la velocidad al inicio de la vibración:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(0) \quad \text{y} \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(0) \quad \text{para } t=0 \quad (65)$$

Sin embargo, los procedimientos a aplicar para obtener la solución en este caso dependen del tipo de amortiguamiento del sistema, considerando dos casos diferentes:

- **Amortiguamiento clásico:** es aquel en el que la matriz de amortiguamiento cumple la siguiente

interno realizado por el sistema Q en los desplazamientos producidos por el sistema P.

relación (según demostraron Caughey y O'Kelly en 1965):

$$\mathbf{cm}^{-1}\mathbf{k} = \mathbf{km}^{-1}\mathbf{c} \quad (66)$$

En este caso, las formas modales calculadas en el sistema sin amortiguamiento, a partir de \mathbf{k} y \mathbf{m} , son ortogonales con respecto a la matriz de amortiguamiento \mathbf{c} , y se cumple que:

$$[\phi]^T [\mathbf{c}][\phi] = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & C_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & C_N \end{bmatrix} \equiv \phi^T \mathbf{c} \phi = \text{diag}(\mathbf{C}) \quad (67)$$

donde \mathbf{C} es una matriz diagonal. La solución de la Ecuación 64 para amortiguamiento clásico se plante en forma totalmente similar a la de un sistema sin amortiguamiento. Este tipo de amortiguamiento suele también denominarse amortiguamiento proporcional.

- **Amortiguamiento no clásico:** es aquel en el que la matriz de amortiguamiento no cumple con la relación definida por la Ecuación 66 (y por ende no se cumple tampoco la Ecuación 67). En este caso, también llamado amortiguamiento no proporcional, las formas modales del sistema son complejas y la resolución matemática del problema es más complicada.

En este trabajo no presentamos el desarrollo de las soluciones para el caso vibración libre de sistemas amortiguados, debido a que no resulta de interés para las aplicaciones prácticas usuales de la ingeniería estructural.

7. ANÁLISIS MODAL

7.1 Formulación general

En la Sección 2, formulamos la ecuación de equilibrio dinámico para una estructura de N GDL sometida a una acción dinámica cualquiera (Ecuación 4) y luego en la Sección 5 analizamos el caso particular de la acción del terremoto (Ecuación 29). Estas expresiones matemáticas representan un sistema de ecuaciones diferenciales que puede resolverse mediante integración numérica. Sin embargo, este procedimiento presenta dos inconvenientes. En primer lugar, la complejidad de resolver el sistema completo de ecuaciones y en segundo lugar los dificultad para aplicar directamente el espectro de diseño (que es la forma usual mediante la cual los códigos de diseño definen la acción sísmica). Es por ello que el análisis modal, y particularmente el análisis modal espectral es la herramienta más usada en la práctica profesional para el análisis dinámico de estructuras sometidas a terremotos. En esta sección presentaremos la formulación general y luego analizaremos el caso particular de acción sísmica.

El análisis modal, o análisis por superposición de desplazamientos modales, fue introducido por Lord Rayleigh en 1877, como una alternativa para el análisis dinámico de estructuras lineales. Este procedimiento se basa en calcular los desplazamientos \mathbf{u} (desplazamientos de los N GDL del sistema) considerando que cualquier vector puede expresarse mediante una base de N vectores

independientes. En este caso particular empleamos las formas modales (autovectores del sistema), que son ortogonales entre sí. El vector $\mathbf{u}(t)$ se puede expresar como una combinación lineal de las formas modales, que son independientes del tiempo, multiplicadas por una coordenada modal, que varía en el tiempo, $q_j(t)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= \{\phi\}_1 q_1(t) + \dots + \{\phi\}_j q_j(t) + \dots + \{\phi\}_N q_N(t) = \sum_{j=1}^N \{\phi\}_j q_j(t) = \\ \mathbf{u}(t) &= [\Phi]\{q(t)\} = \Phi \mathbf{q}(t)\end{aligned}\quad (68)$$

Dada la importancia de la Ecuación 68, la expresamos también en forma expandida para una mejor visualización y facilitar así la comprensión de su significado matemático:

$$\begin{Bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_i(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\phi\}_1 & \dots & \{\phi\}_j & \dots & \{\phi\}_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_j(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{Bmatrix}\quad (69)$$

Es necesario comprender la diferencia entre los desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ y las coordenadas modales o coordenadas normales $\mathbf{q}(t)$. Los primeros representan los N desplazamientos reales de la estructura, que definen su posición deformada ante la vibración producida por la acción dinámica, mientras las coordenadas $q(t)$ son funciones auxiliares que se introducen como un paso intermedio para obtener la solución. En principio, se requiere de N coordenadas $q(t)$, cada una de las cuales multiplica a un vector modal ϕ . Luego veremos que es posible, con un error poco significativo, considerar, un número de modos menor que N. Es por ello que en este trabajo se emplea el subíndice “i” para identificar genéricamente uno de los N GDL adoptados para representar el sistema, mientras que se usa “j” para las coordenadas modales. Este criterio se ha adoptado, a diferencia de la bibliografía, para llamar la atención y expresar explícitamente la diferencia entre $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{q}(t)$.

A partir de la Ecuación 68 es posible definir el vector de velocidad y aceleración calculando la derivada primera y segunda, respectivamente, con respecto al tiempo (recordar que la derivada) de modo que obtenemos:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \Phi \dot{\mathbf{q}}(t)\quad (70)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \Phi \ddot{\mathbf{q}}(t)\quad (71)$$

Reemplazando las Ecuaciones 68, 70 y 71 en la Ecuación 4 obtenemos la condición de equilibrio dinámico en función de las coordenadas modales:

$$\begin{aligned}[m][\phi]\{\ddot{q}\} + [c][\phi]\{\dot{q}\} + [k][\phi]\{q\} &= \{p(t)\} \\ \equiv \\ \mathbf{m}\Phi\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}\Phi\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{k}\Phi\mathbf{q} &= \mathbf{p}(t)\end{aligned}\quad (72)$$

y premultiplicando la Ecuación 72 por la matriz modal transpuesta, Φ^T :

$$\begin{aligned}
[\phi]^T [m][\phi]\{\ddot{q}\} + [\phi]^T [c][\phi]\{\dot{q}\} + [\phi]^T [k][\phi]\{q\} &= [\phi]^T \{p(t)\} \\
\equiv & \\
\Phi^T \mathbf{m}\Phi\ddot{\mathbf{q}} + \Phi^T \mathbf{c}\Phi\dot{\mathbf{q}} + \Phi^T \mathbf{k}\Phi\mathbf{q} &= \Phi^T \mathbf{p}(t)
\end{aligned}
\tag{73}$$

Si consideramos las propiedades de ortogonalidad de las formas modales con respecto a la masa y rigidez (ver Ecuaciones 60 y 61) y asumiendo además la condición de amortiguamiento clásico (Ecuación 67) obtenemos la siguiente expresión:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}(t) \tag{74}$$

donde **M**, **C** y **K** son matrices de masa amortiguamiento y rigidez, respectivamente expresadas respecto del sistema de coordenadas modales y usualmente se las denomina como masa, amortiguamiento y rigidez modales (en alguna bibliografía también se las define como matrices generalizadas).

Las matrices **M**, **C** y **K** son diagonales, por lo que el sistema de N ecuaciones diferenciales se desacopla, resultando en un conjunto de N ecuaciones diferenciales independientes entre sí. En forma genérica, la ecuación en coordenadas modales se expresa como:

$$M_j \ddot{q}_j + C_j \dot{q}_j + K_j q_j = P_j(t) \tag{75}$$

donde **P(t)** es el vector de acciones dinámicas, expresado en el sistema de coordenadas normales:

$$\mathbf{P}(t) = \Phi^T \mathbf{p}(t) \tag{76}$$

Alternativamente, si dividimos la Ecuación 75 por la masa M_j e introducimos el factor de amortiguamiento (definido para sistemas de 1 GDL como $\xi = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega}$) obtenemos:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = \frac{P_j(t)}{M_j} \tag{77}$$

Es importante notar que las Ecuaciones 75 y 77 son equivalentes, sin embargo, la segunda presenta ventajas en las aplicaciones prácticas debido a que no requiere calcular la matriz de amortiguamiento y luego transformarla a coordenadas modales (mediante la Ecuación 67). En la Ecuación 77 el amortiguamiento se considera a través del factor ξ , cuyos valores pueden determinarse experimentalmente o bien asumirse a partir de requerimientos reglamentarios o recomendaciones para estructuras típicas.

La Figura 25 presenta una interpretación gráfica de la transformación de coordenadas que permite desacoplar el sistema para su resolución. Además, muestra la relación entre la ecuación general de equilibrio dinámico y las ecuaciones modales correspondientes a los osciladores equivalentes que surgen al desacoplar el sistema de ecuaciones.

A partir de lo expuesto en esta sección, la aplicación del análisis modal a una estructura lineal de N GDL con amortiguamiento clásico puede resumirse en las siguientes etapas principales:

1. Modelo de la estructura como un sistema de N GDL y determinación de las frecuencias propias

- (autovalores) y modos de vibración (autovectores) a partir de las matrices de masa y rigidez.
2. Cambio de coordenadas para desacoplar el sistema. Esto implica transformar el modelo de la estructura real en un modelo equivalente formado por N osciladores de 1 GDL.
 3. Resolución de las N ecuaciones independientes para determinar los desplazamientos $\mathbf{q}(t)$ en coordenadas modales (Ecuación 75 o 77).
 4. Cálculo de los desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ mediante la Ecuación 68, dado que se conoce la matriz modal y los desplazamientos $\mathbf{q}(t)$.
 5. Cálculo de los parámetros de respuesta estructural requeridos en el análisis.

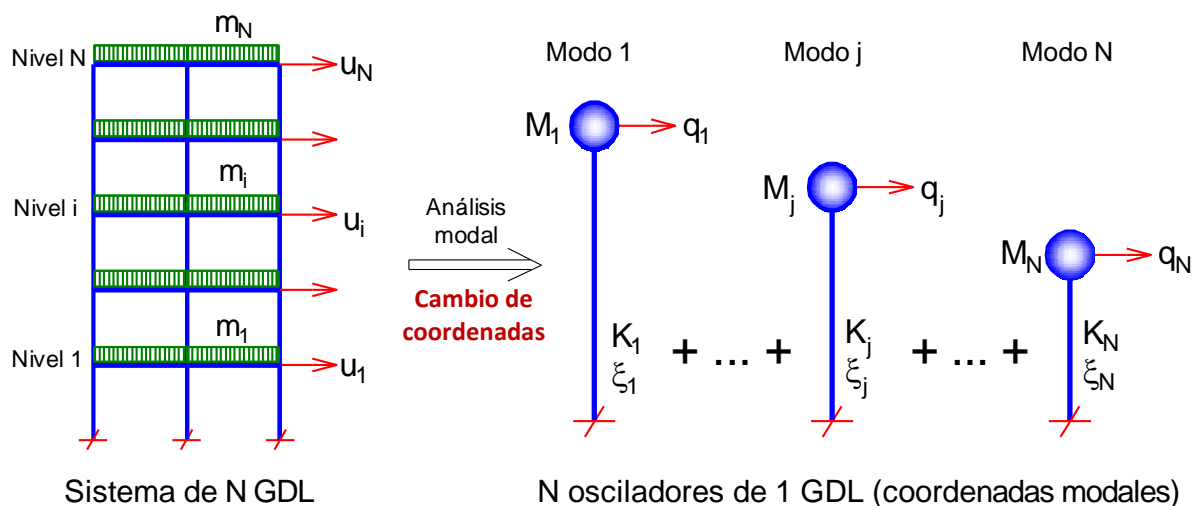


Figura 25. Interpretación gráfica del análisis modal mediante el cual se transforma el problema para su resolución.

7.2 Matriz de amortiguamiento clásico

En la Sección 4.3 explicamos el concepto del amortiguamiento en la vibración estructural y la conveniencia matemática de representarlo mediante un modelo de amortiguamiento viscoso. Luego, en la Sección 6.2 definimos el amortiguamiento clásico, como aquel que cumple con la Ecuación 66, y que permite diagonalizar la matriz \mathbf{c} cuando se aplica el análisis modal. Ahora veremos la forma práctica de determinar la matriz de amortiguamiento clásico.

En 1877, John William Strutt, más conocido como Lord Rayleigh, propuso determinar la matriz de amortiguamiento como una combinación lineal de las matrices de masa y rigidez:

$$\mathbf{c} = a_0 \mathbf{m} + a_1 \mathbf{k} \quad (78)$$

donde a_0 y a_1 son dos constantes a determinar. La matriz \mathbf{c} así definida se denomina matriz de amortiguamiento de Rayleigh o de amortiguamiento proporcional. Dado que las formas modales son ortogonales con respecto a las matrices \mathbf{m} y \mathbf{k} , también lo son a la matriz \mathbf{c} definida por la Ecuación 78 y por lo tanto en el análisis modal la matriz de amortiguamiento es diagonal:

$\phi^T c \phi = \text{diag}(C)$, lo cual permite desacoplar el sistema de ecuaciones. La Ecuación 78 puede analizarse considerando por separado cada uno de sus dos términos. El primero indica que el amortiguamiento es proporcional a la matriz de masa e implica que el factor de amortiguamiento para un modo de vibración cuya frecuencia propia es ω_j puede calcularse como:

$$\xi_j = \frac{C_j}{C_{crj}} = \frac{C_j}{2M_j\omega_j} = \frac{a_0}{2\omega_j} \quad (79)$$

El segundo término es proporcional a la rigidez y, procediendo en forma similar, el factor de amortiguamiento para este caso es:

$$\xi_j = \frac{C_j}{C_{crj}} = \frac{C_j}{2M_j\omega_j} = \frac{a_1 K_j}{2M_j\omega_j} = \frac{a_1\omega_j}{2} \quad (80)$$

Sumando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos la expresión general que indica el valor del factor de amortiguamiento para el modo j en función de la frecuencia propia del mismo:

$$\xi_j = \frac{a_0}{2\omega_j} + \frac{a_1\omega_j}{2} \quad (81)$$

La Figura 26(a) muestra la variación del factor de amortiguamiento en función de la frecuencia para el caso de amortiguamiento proporcional a la masa y a la rigidez (líneas de trazo) y también el caso de amortiguamiento de Rayleigh que combina los dos casos anteriores (Ecuación 81).

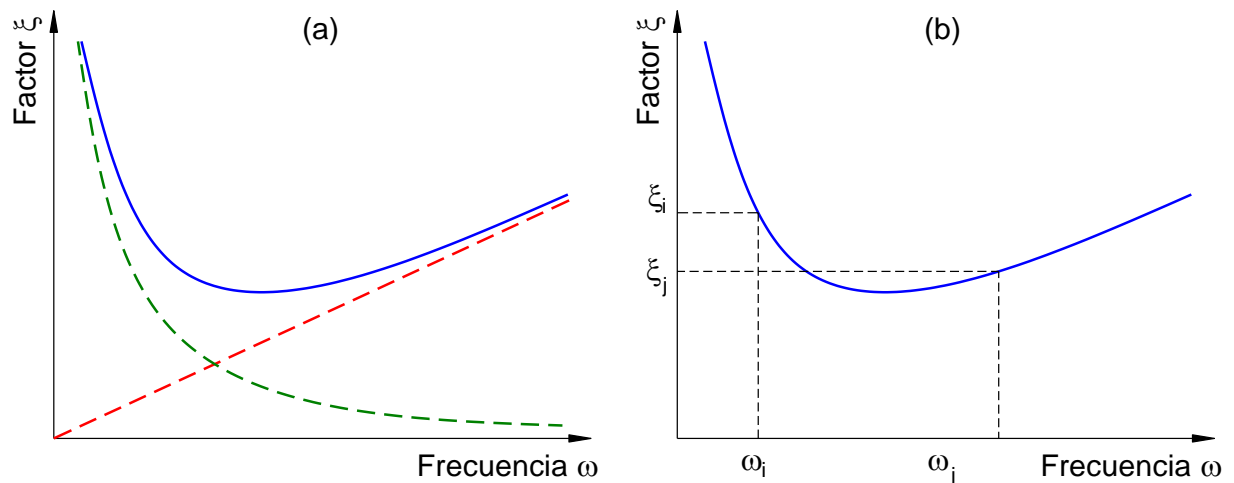


Figura 26. Variación del factor de amortiguamiento ξ en función de la frecuencia para el caso de amortiguamiento de Rayleigh.

La determinación de las constantes a_0 y a_1 se realiza adoptando valores del factor de amortiguamiento para dos modos del sistema estructural que se analiza, es decir que se impone la condición de que los modos i y j , cuyas frecuencias propias ω_i y ω_j son conocidas, tienen factores de amortiguamiento ξ_i y ξ_j , respectivamente. A partir de esta condición y reemplazando en la Ecuación 79 para los dos casos, se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que permite calcular los valores de a_0 y a_1 :

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \omega_i \\ \omega_i & \omega_j \\ 1 & \omega_j \\ \omega_j & \omega_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_i \\ \xi_i \end{Bmatrix} \quad (82)$$

En el caso particular de adoptar el mismo valor del factor de amortiguamiento ξ para los modos i y j , se puede demostrar que las constantes son:

$$a_0 = \xi \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad a_1 = \xi \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (83)$$

Una vez determinados los valores de a_0 y a_1 la matriz de amortiguamiento queda definida por la Ecuación 78. Los factores de amortiguamiento quedan definidos para los dos modos que se usaron para, mientras que en los restantes modos el valor de ξ es el que resulta de aplicar la Ecuación 81. La Figura 26 (b) muestra la curva de variación del factor de amortiguamiento e indica gráficamente los valores de las frecuencias de los dos modos considerados para definir el factor de amortiguamiento. Se observa que los modos restantes pueden resultar con factores de amortiguamiento que son mayores o menores que los adoptados para los modos i y j . Es por ello que debe elegirse con precaución los modos donde se fijarán los valores de ξ para evitar situaciones de amortiguamiento erróneo ya sea por exceso o por defecto. En conclusión, la matriz de amortiguamiento de Rayleigh es una matriz de $N \times N$, que puede ser diagonalizada en el análisis modal, $\phi^T \mathbf{c} \phi = \text{diag}(\mathbf{C})$, y cuyos coeficientes se determinan fijando el valor del factor de amortiguamiento, ξ , para dos modos de vibración.

Caughey propuso en 1960 una generalización del amortiguamiento proporcional, mediante una serie de N términos para definir la matriz \mathbf{c} :

$$\mathbf{c} = \mathbf{m} \sum_{k=0}^{N-1} a_k (\mathbf{m}^{-1} \mathbf{k})^k = a_0 \mathbf{m} + a_1 \mathbf{k} + a_2 \mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} + \dots + a_{N-1} \mathbf{m} (\mathbf{m}^{-1} \mathbf{k})^{N-1} \quad (84)$$

Como se observa al analizar la Ecuación 81, los dos primeros términos corresponden a la matriz de Rayleigh, de modo que ésta es un caso particular de la expresión general de Caughey para $N=2$. La ventaja de definir la matriz \mathbf{c} a partir de la serie de Caughey, más allá de su mayor complejidad matemática, es que permite definir el valor de factor de amortiguamiento para todos los modos de vibración (si se consideran los N términos de la serie completa) o para los modos más significativos (si se adopta la serie con un número de términos $k < N$). Los coeficientes a_k de la serie se determinan en forma similar al caso de amortiguamiento de Rayleigh, con la diferencia que se debe resolver un sistema con un número de ecuaciones igual al número de términos considerados.

En esta sección hemos desarrollado la matriz de amortiguamiento clásico que permite desacoplar el sistema de ecuaciones de movimiento, debido a que cumple con la condición de ortogonalidad. Sin embargo, cuando se aplica el método de análisis modal y se resuelven las ecuaciones en coordenadas modales (Ecuación 77) no es necesario determinar la matriz de amortiguamiento \mathbf{c} , sino que se emplea directamente el factor de amortiguamiento ξ . En las aplicaciones prácticas es usual adoptar el mismo valor de ξ para todos los modos considerados en

el análisis, si bien el método permite definir valores distintos para cada modo si ello fuera necesario. Esta es una ventaja adicional del análisis modal sobre otros procedimientos de la dinámica estructural.

7.3 Formulación para acción sísmica

En el caso de una estructura sometida a la acción sísmica, podemos reemplazar en la ecuación de equilibrio dinámico formulada previamente para el análisis modal (Ecuación 74) el valor de la fuerza efectiva definido en la Ecuación 30, de modo que:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\Phi^T \mathbf{m} \mathbf{1} \ddot{u}_g(t) = -\mathbf{L}\ddot{u}_g(t) \quad (85)$$

En el término independiente de la Ecuación 86 se ha introducido el factor \mathbf{L} que se denomina factor modal de excitación sísmica o factor modal de excitación (Clough y Penzien, 2010):

$$\mathbf{L} = \Phi^T \mathbf{m} \mathbf{1} \quad (86)$$

$$L_j = \phi_j^T \mathbf{m} \mathbf{1} = \{\phi\}_j^T [m] \{1\} \quad (87)$$

El factor \mathbf{L} tiene unidades de masa y sus valores dependen del criterio de normalización usado para las formas modales. Alternativamente, si multiplicamos todos los términos de la Ecuación 85 por la inversa de la matriz de masa resulta:

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\xi\Omega\dot{\mathbf{q}} + \Omega^2\mathbf{q} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{L}\ddot{u}_g(t) = \Gamma\ddot{u}_g(t) \quad (88)$$

donde ξ es una matriz diagonal cuyos valores indican el factor de amortiguamiento para cada modo, Ω es la matriz diagonal de frecuencias modales, y Γ es un vector que se denomina factor de participación modal (Chopra, 2012) o factor de participación de masa efectiva:

$$\Gamma = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{L} = \mathbf{M}^{-1}\Phi^T \mathbf{m} \mathbf{1} \quad (89)$$

$$\Gamma_j = \frac{L_j}{M_j}$$

Para el caso particular en el que $\mathbf{1} = \mathbf{1}$, situación usual en el análisis de estructuras planas (por ejemplo caso (a), Figura 18), se tiene:

$$\Gamma_j = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \phi_{ij}}{\sum_{i=1}^N m_i \phi_{ij}^2} \quad (90)$$

Los vectores \mathbf{L} y Γ son conceptualmente equivalentes, ambos indican incidencia relativa que cada modo tiene en la respuesta total debido a que solo una fracción de la masa total del sistema participa en los distintos modos de vibración. La diferencia radica en que \mathbf{L} tiene unidades de masa, mientras que Γ es un factor adimensional. Si comparamos la Ecuación 85 con la Ecuación general para sistemas de N GDL sometidos a la acción sísmica (Ecuación 29) vemos que el factor \mathbf{L} también puede interpretarse como un factor que afecta directamente la aceleración del terreno $\ddot{u}_g(t)$, o en otras palabras, que la transformación de coordenadas modifica la aceleración del sismo a considerar

en el análisis de cada modo. En forma similar, el factor Γ modifica la aceleración $\ddot{u}_g(t)$ a considerar en el análisis cuando se emplea la Ecuación 88.

Las matrices M, C y K en la Ecuación 85 son diagonales, como se ha demostrado previamente, por lo tanto esta ecuación no representa un sistema de ecuaciones diferenciales, sino una serie de N ecuaciones independientes entre sí. La ecuación diferencial correspondiente al modo genérico j es:

$$M_j \ddot{q}_j + C_j \dot{q}_j + K_j q_j = -L_j \ddot{u}_g(t) \quad (91)$$

o, alternativamente, con el formato equivalente de la Ecuación 88:

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\frac{L_j}{M_j} \ddot{u}_g(t) = -\Gamma_j \ddot{u}_g(t) \quad (92)$$

Las Ecuaciones 91 (o alternativamente las Ecuaciones 92) permiten determinar las N coordenadas modales $\mathbf{q}(t)$ mediante integración numérica. Para ello, recordemos primero la ecuación de equilibrio dinámico para un oscilador de 1 GDL:

$$\ddot{u} + 2\xi \omega_n \dot{u} + \omega_n^2 u = -\ddot{u}_g(t) \quad (93)$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia del oscilador. Es importante destacar que en la Ecuación 93 el subíndice n hace referencia a la frecuencia natural del sistema de 1 GDL, no tiene ninguna relación con los modos de vibración. Dado que estamos analizando sistemas de N GDL, la ecuación diferencial debe integrarse numéricamente para cada uno de los N modos del sistema. De modo que resulta conveniente para evitar confusiones, designar con D(t) al desplazamiento resultado de la integración, considerando además la frecuencia y factor de amortiguamiento de cada modo (lo que se indica en forma genérica con el subíndice j):

$$\ddot{D}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{D}_j + \omega_j^2 D_j = -\ddot{u}_g(t) \quad (94)$$

Si comparamos las Ecuaciones 92 y 94, la respuesta temporal para cada modo puede determinarse como:

$$q_j(t) = \Gamma_j D_j(t) \quad (95)$$

Una vez que se han calculado los desplazamientos en coordenadas modales $q_j(t)$, se puede determinar la contribución del modo j a la respuesta del sistema estructural como:

$$\mathbf{u}_j = \{u(t)\}_j = \{\phi\}_j q_j(t) \quad (96)$$

donde el vector \mathbf{u}_j representa los desplazamientos reales de la estructura (en cada uno de los GDL) debido a la contribución del modo j. La respuesta total se obtiene sumando el aporte de cada uno de los modos de vibración, según la Ecuación 68:

$$\{u(t)\} = \sum_{j=1}^N \mathbf{u}_j = \begin{Bmatrix} u1 \\ \dots \\ ui \\ \dots \\ uN \end{Bmatrix}_1 + \dots + \begin{Bmatrix} u1 \\ \dots \\ ui \\ \dots \\ uN \end{Bmatrix}_j + \dots + \begin{Bmatrix} u1 \\ \dots \\ ui \\ \dots \\ uN \end{Bmatrix}_N \quad (97)$$

En la Figura 27 presentamos un resumen, en forma de gráfico, de las etapas principales del análisis modal. No se incluye la determinación de los parámetros de respuesta estructural, debido a que este aspecto se discute en detalle en la sección siguiente.

Es importante aclarar que los valores de los desplazamientos relativos $u(t)$ son independientes de la forma en que se normalizaron los modos de vibración, sin embargo, las coordenadas modales $q(t)$ no lo son. Las Ecuaciones 68 y 97 expresan matemáticamente la aplicación del principio de superposición de efectos y nos indica que el análisis modal es aplicable bajo la hipótesis de comportamiento lineal y elástico en el campo de pequeñas deformaciones.

En el procedimiento descrito previamente, los valores de las coordenadas modales $\mathbf{q}(t)$ se han obtenido por integración temporal. Por esta razón, el procedimiento se denomina análisis modal temporal o análisis modal con integración en el tiempo, para diferenciarlo así del análisis modal espectral, que desarrollaremos en la Sección 8.

7.4 Determinación de los parámetros de respuesta estructural

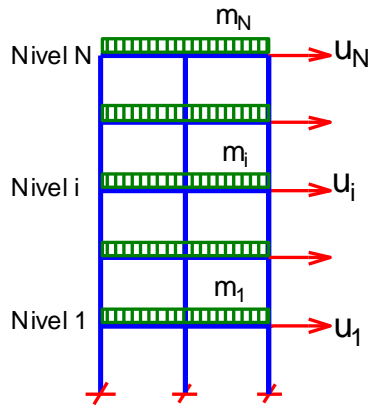
En la sección anterior desarrollamos la formulación del análisis modal para el caso de acción sísmica e indicamos el procedimiento hasta la determinación de la respuesta temporal en términos de desplazamientos (vector \mathbf{u}). Es necesario, sin embargo, calcular otros parámetros adicionales que se requieren en el diseño o la verificación estructural (etapa 5 del procedimiento general indicado en la Sección 7.1). Las fuerzas elásticas asociadas a los desplazamientos relativos \mathbf{u} (GDL del modelo) se pueden calcular como:

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{t}) = \mathbf{k} \mathbf{u}(\mathbf{t}) = \mathbf{k}\Phi\mathbf{q}(\mathbf{t}) = \mathbf{k}\Phi\{\Gamma_j D_j(t)\} \quad (98)$$

Alternativamente, las fuerzas elásticas también pueden expresarse en términos de fuerzas inerciales equivalentes, de modo que reemplazando en la Ecuación 98 la condición de equivalencia del problema de autovalores y autovectores, definida por la Ecuación 55, se obtiene:

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{t}) = \mathbf{m}\Phi\Omega^2\mathbf{q}(\mathbf{t}) = \mathbf{m}\Phi\{\Gamma_j\omega_j^2 D_j(t)\} \quad (99)$$

1. Modelo estructural (N GDL dinámicos) y cálculo de frecuencias y modos de vibración



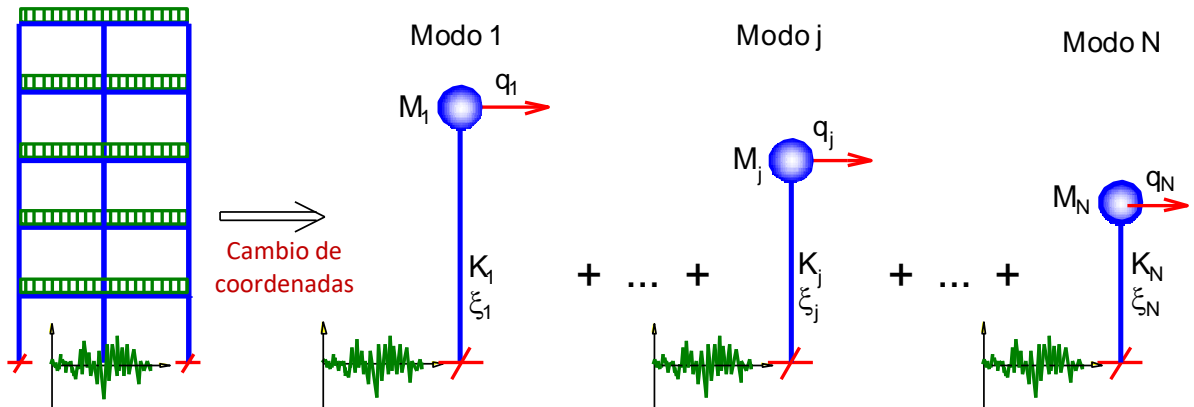
Ecuación de equilibrio dinámico

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m} \mathbf{1} \ddot{u}_g(t)$$

N frecuencias naturales: $\boldsymbol{\omega} = \{\omega\}$

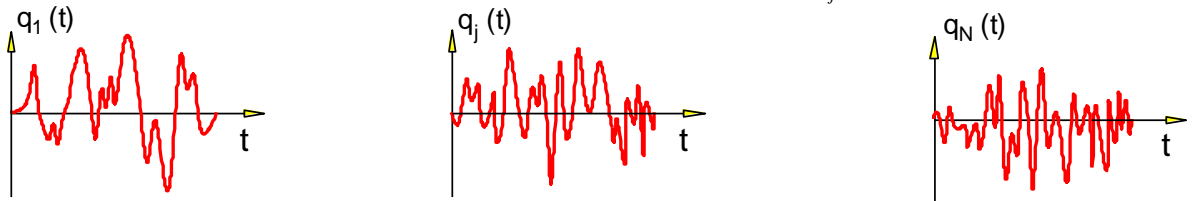
N modos de vibración: $\boldsymbol{\Phi} = [\{\phi\}_1 \dots \{\phi\}_j \dots \{\phi\}_N]$

2. Transformación a coordenadas modales (N osciladores de 1 GDL)



3. Cálculo de la respuesta temporal en coordenadas modales

Integración de la ecuación diferencial: $\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2q_j = -\frac{L_j}{M_j}\ddot{u}_g(t) = -\Gamma_j\ddot{u}_g(t)$



4. Cálculo de los desplazamientos reales de la estructura

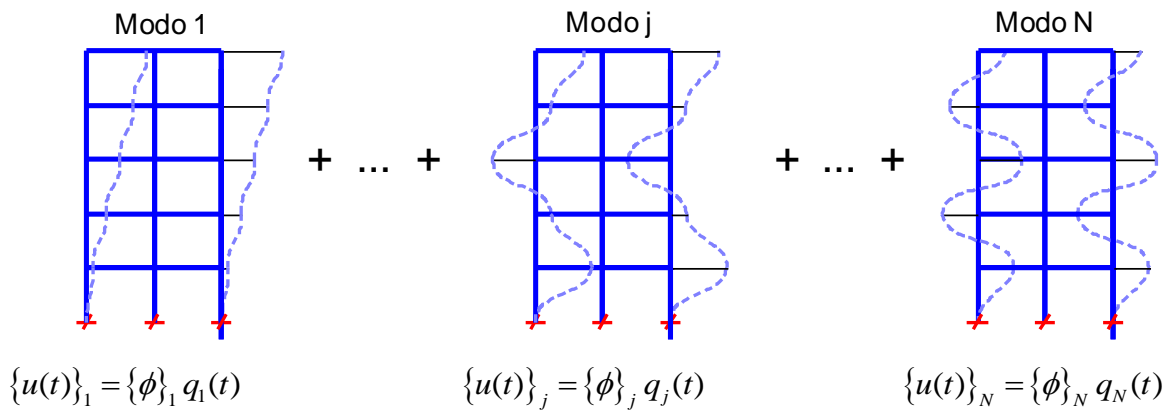


Figura 27. Interpretación gráfica de las etapas principales del análisis modal temporal.

Los esfuerzos internos en la estructura, esto es momentos flectores, fuerzas axiales y de corte, como así también las reacciones de vínculo pueden obtenerse por análisis estructural estático. Para ello, puede aplicarse dos criterios:

- A partir de los desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ obtenidos del análisis modal. Si el vector de desplazamientos $\mathbf{u}(t)$ incluye solo los GDL dinámicos es necesario considerar todos los desplazamientos nodales (incluidas las rotaciones) requeridos para el análisis estructural estático (ver Sección 4.4- Condensación estática). Esta situación se muestra en la Figura 28(a) donde se presenta el ejemplo de un pórtico de 5 niveles, el cual se ha modelado con 5 GDL dinámicos (un desplazamiento horizontal por nivel).
- A partir de fuerzas estáticas equivalentes, determinadas como $\mathbf{f}_s(t) = \mathbf{k} \mathbf{u}(t)$, las cuales se aplican en los GDL considerados en el modelo, ver Figura 28 (b). Este segundo procedimiento es el más usual porque facilita la comparación del análisis dinámico con las fuerzas de diseño requeridas por los reglamentos de diseño.

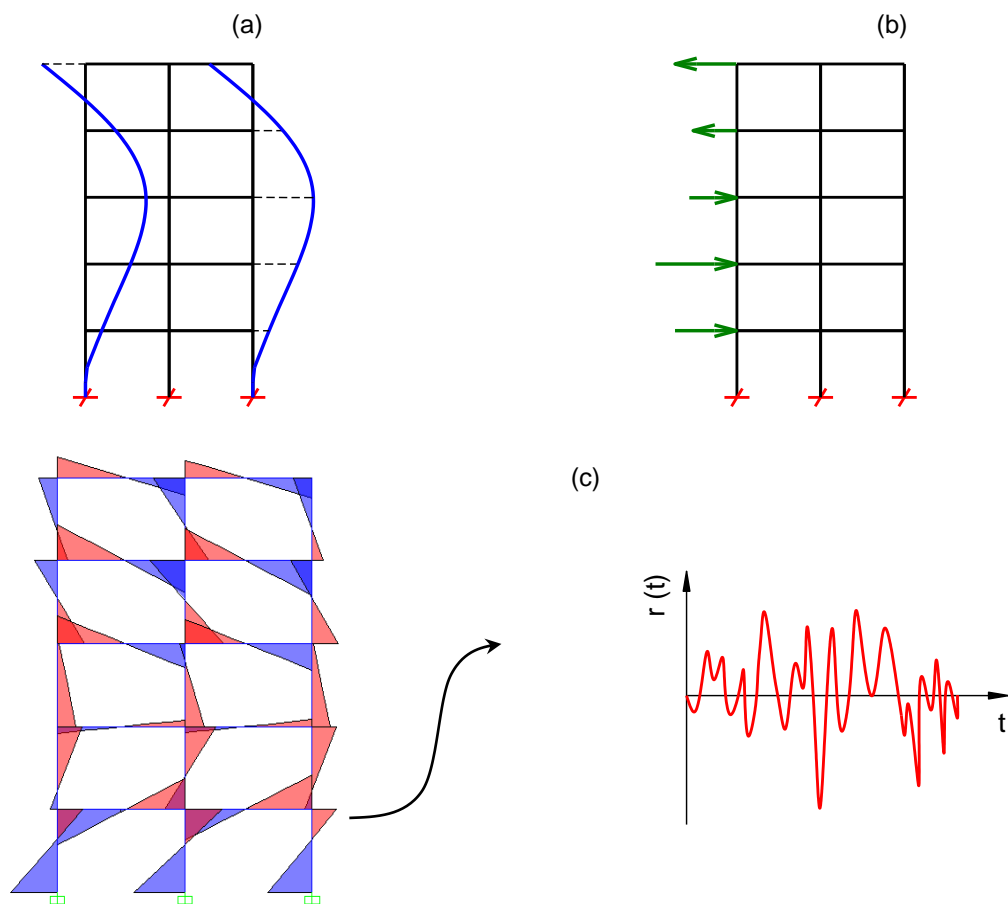


Figura 28. Determinación de esfuerzos internos y reacciones mediante análisis estructural estático.

El cálculo de los parámetros de respuesta estructural debe realizar para cada instante t (considerando que tanto los desplazamientos u , como las fuerzas f_s son funciones del tiempo). Esta situación se muestra gráficamente en la Figura 28(c), donde se presenta el diagrama de momentos

flectores en un instante dado y se indica la variación en el tiempo del momento flector en el extremo de una columna del primer nivel. En forma genérica, denominamos con $r(t)$ a cualquier parámetro de respuesta estructural.

En el caso de estructuras donde todos los GLD son desplazamientos horizontales, como pórtico que se muestra en el ejemplo de la Figura 29, el corte basal puede determinarse como la suma de las fuerzas sísmicas:

$$V_0(t) = \sum_{j=1}^N f_{sj}(t) = \{1\}^T \{f_s(t)\} \quad (100)$$

Reemplazando la Ecuación 99 en la 100, el corte basal resulta:

$$V_0(t) = \sum_{j=1}^N L_j \Gamma_j \omega_j^2 D_j(t) = \sum_{j=1}^N \frac{L_j^2}{M_j} \omega_j^2 D_j(t) \quad (101)$$

La Ecuación 101 es válida para los casos en que el vector de influencia es $\mathbf{1}=\mathbf{1}$ (como en ocurre en el tipo de estructuras mostrada en la Figura 29), de modo que en este caso se cumple que:

$$\{L\}^T = \{1\}^T [m][\phi] \quad (102)$$

La cantidad $\frac{L_j^2}{M_j}$ que figura en la Ecuación 101 tiene unidades de masa y se denomina usualmente masa modal efectiva:

$$M_j^* = \frac{L_j^2}{M_j} = \Gamma_j L_j \quad (103)$$

La masa modal efectiva es independiente de la normalización usada para definir las formas modales y se puede demostrar que la suma de todas ellas es igual a la masa total del sistema.

$$\sum_{j=1}^N M_j^* = \sum_{j=1}^N m_j \quad (104)$$

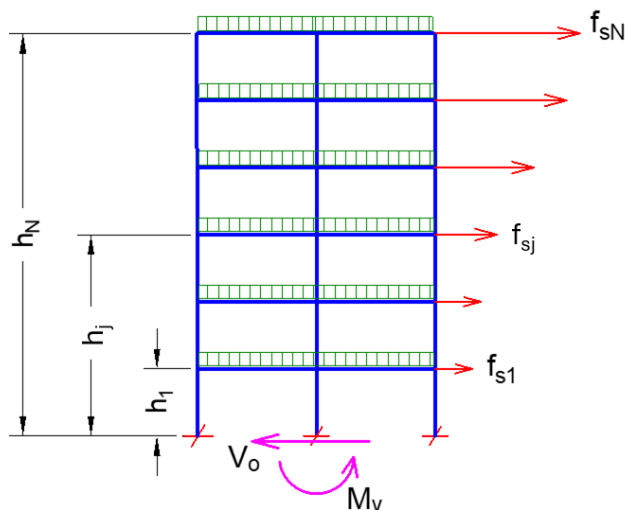


Figura 29. Ejemplo de un pórtico modelado con GDL horizontales.

Los programas de análisis estructural de uso profesional determinan la masa modal, o un parámetro equivalente, para cada uno de los modos considerados en el cálculo. Sin embargo, es importante que el usuario consulte los manuales y la documentación técnica de cada programa en particular para entender la terminología y el criterio de cálculo. Así por ejemplo, el programa SAP 2000 determina un factor que denomina *participating mass ratio*, que es conceptualmente equivalente a la masa modal efectiva definida previamente, solo que en este caso los valores son relativo.

Otro parámetro de interés es el momento de vuelco total que originan las fuerzas sísmicas respecto de la base de la estructura (ver Figura 29):

$$M_v(t) = \sum_{j=1}^N h_j f_{sj}(t) = \{h_j\}^T \{f_s(t)\} \quad (105)$$

7.5 Número de modos a considerar en el análisis modal

En las secciones previas hemos determinado que un sistema de N GDL presenta N modos de vibración, mediante los cuales se puede realizar una transformación de coordenadas que permite desacoplar el sistema. Desde un punto de vista estricto, todos los modos de vibración deben considerarse en el análisis para obtener la “respuesta exacta” por este procedimiento. Sin embargo, en las aplicaciones prácticas se puede reducir el número de modos de vibración que se incluyen en el análisis. Esta reducción resulta conveniente en las muchas aplicaciones prácticas, particularmente en casos de estructuras complejas, cuyo modelo estructural presenta un número elevado de GDL.

Es por ello que los reglamentos permiten reducir el número de modos a considerar en el análisis, incluyendo a aquellos más relevantes y descartando los que tiene una baja participación en la respuesta total del sistema. El Reglamento INPRES-CIRSOC 103, Parte I, Sección 7.2.3 indica que se deben incluir “todos los modos significativos. Esta condición es satisfecha si los modos considerados representan la contribución de al menos el 90% de la masa total de la construcción para cada una de las direcciones analizadas.”

8. ANALISIS MODAL ESPECTRAL

8.1 Formulación general

El análisis dinámico de una estructura sometida a la acción sísmica permite determinar la respuesta temporal de los distintos parámetros estructurales de interés para el diseño. Esta respuesta puede obtenerse por distintos procedimientos, siendo los más usuales la integración directa del sistema de ecuaciones o el método de análisis modal temporal (desarrollado en la sección previa). Sin embargo, la aplicación ingenieril de estos procedimientos, especialmente en el diseño de estructuras sismorresistentes, presenta algunas dificultades que es necesario considerar:

- Los resultados obtenidos del análisis dinámico son funciones temporales, es decir que todos los parámetros requeridos en el diseño (desplazamientos, esfuerzos internos en los elementos estructurales, reacciones, etc.) varían en el tiempo según una función que se define mediante un

número elevado puntos. De modo es necesario procesar y analizar una gran cantidad de datos, si bien a los efectos del diseño se requieren solamente los valores extremos (esto es máximos y mínimos) de los parámetros de respuesta.

- La acción sísmica se define mediante un acelerograma, que representa el movimiento del suelo (en términos de aceleraciones) para un terremoto dado, ya sea registrado instrumentalmente en un sismo pasado o generado artificialmente. Sin embargo, el diseño de una construcción no puede realizarse con un solo registro (por la variabilidad que presentan los sismos), razón por la cual se deben considerar varios registros de aceleración (usualmente los reglamentos requieren el uso de tres registros como mínimo). Esta situación aumenta el número de análisis a realizar y complica la interpretación y aplicación de los resultados.

A partir de estas conclusiones surge la pregunta: ¿es posible obtener los valores extremos de respuesta requeridos en el diseño estructural sin obtener su variación en el tiempo? La respuesta es sí, a través de un procedimiento especial, derivado del análisis modal, en el cual se emplea un espectro de respuesta o de diseño (en el caso de las aplicaciones según reglamento). Es por ello que vamos a desarrollar en esta sección el procedimiento denominado análisis modal espectral.

La respuesta máxima correspondiente a cada modo de vibración (que representa un sistema de 1 GDL con periodo T_j) puede obtenerse directamente de un espectro, ya sea en términos de aceleración o de desplazamientos. Así por ejemplo, el desplazamiento modal máximo o mínimo, q_{oj} , puede determinarse como (ver Ecuación 95):

$$q_{oj} = \Gamma_j S_{Dj}(\xi_j, T_j) \quad (106)$$

donde $S_{Dj}(\xi_j, T_j)$ representa el desplazamiento espectral para el periodo modal T_j considerando un factor de amortiguamiento ξ_j . A partir de la ecuación de transformación modal (Ecuación 68) se calculan los valores máximos de los desplazamientos, u_o (referidos a los GDL del sistema), correspondiente a cada modo de vibración:

$$\{u_o\}_j = \begin{Bmatrix} u_{o1} \\ \dots \\ u_{oi} \\ \dots \\ u_{oN} \end{Bmatrix}_j = \{\phi\}_j q_{oj} \quad (107)$$

Es importante observar que el subíndice “j” en el vector u_o indica que nos referimos a la contribución del modo j a dicho vector. La respuesta total debe incluir la contribución de todos los modos considerados en el análisis, según se explica más adelante.

Alternativamente, el desplazamiento modal q_{oj} también puede obtenerse en función de un espectro de aceleraciones (más precisamente de un espectro de pseudoaceleraciones, para el cual se cumple que $S_A = \omega_j^2 S_D$):

$$q_{oj} = \Gamma_j \frac{S_{Aj}(\xi_j, T_j)}{\omega_j^2} \quad (108)$$

Con un criterio similar, se puede determinar los valores extremos de la aceleración en coordenadas modales, \ddot{q}_{oj} , y la contribución de cada modo al vector de aceleraciones, $\ddot{\mathbf{u}}_{oj}$:

$$\ddot{q}_{oj} = \Gamma_j S_{Aj}(\xi_j, T_j) \rightarrow \{\ddot{\mathbf{u}}_o\}_j = \{\phi\}_j \ddot{q}_{oj} \quad (109)$$

donde $S_{Aj}(\xi_j, T_j)$ es la aceleración espectral. La Figura 30 indica la determinación de las aceleraciones espectrales S_{Aj} para los distintos modos de vibración del sistema.

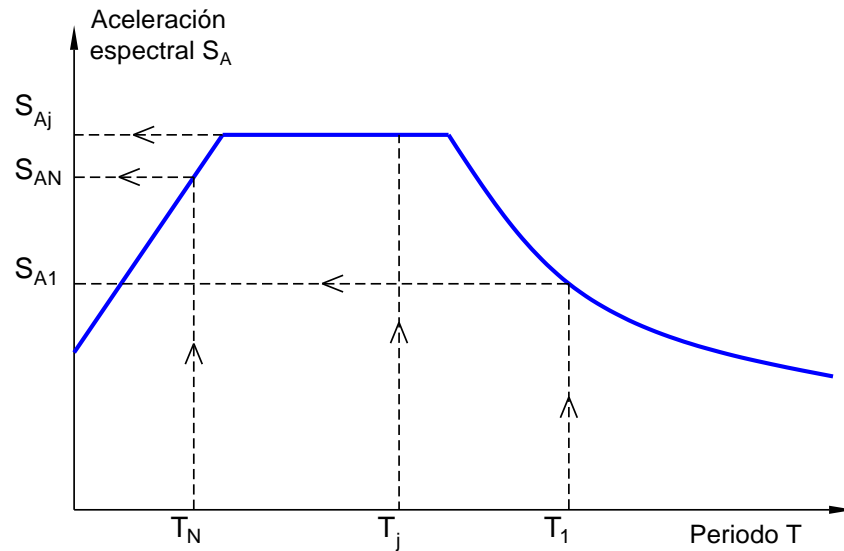


Figura 30. Determinación de los máximos de respuesta modal a partir del espectro de diseño.

Los valores espectrales S_{Dj} y S_{Aj} son, por definición, siempre positivos, mientras que los desplazamientos modales, q_{oj} , y los vectores de desplazamiento y aceleración, \mathbf{u}_{oj} y $\ddot{\mathbf{u}}_{oj}$, pueden tener valores positivos o negativos. Es por ello que usamos el subíndice "o" en los distintos parámetros para indicar que son valores extremos (máximos o mínimos) obtenidos para cada modo mediante el análisis modal espectral.

En la Figura 31 presentamos la interpretación gráfica de los valores q_{oj} . Los desplazamientos modales q son funciones temporales y por ende también lo son las contribuciones de éstos al vector de desplazamientos \mathbf{u} . Sin embargo, en el análisis modal espectral, no se determinan las funciones temporales $q(t)$, sino que se calculan solamente sus valores extremos de la función mediante un espectro.

Los esfuerzos internos y reacciones correspondientes a cada modo de vibración pueden obtenerse, como se indicó en la Sección 7.4, mediante análisis estructural estático, según dos procedimientos: (i) a partir de los desplazamientos $\{\mathbf{u}_o\}_j$, o (ii) a partir de fuerzas equivalentes $\{\mathbf{f}_{so}\}_j$, las que pueden determinarse como:

$$\{\mathbf{f}_{so}\}_j = [\mathbf{k}]\{\mathbf{u}_o\}_j \quad \text{o} \quad \{\mathbf{f}_{so}\}_j = [\mathbf{m}]\{\ddot{\mathbf{u}}_o\}_j \quad (110)$$

De modo que la contribución modal para determinar cualquier parámetro de respuesta en el análisis modal espectral puede indicarse, en forma genérica, como:

$$r_{oj} = f(\mathbf{u}_{oj}) \quad \text{o} \quad r_{oj} = f(\ddot{\mathbf{u}}_{oj}) \quad (111)$$

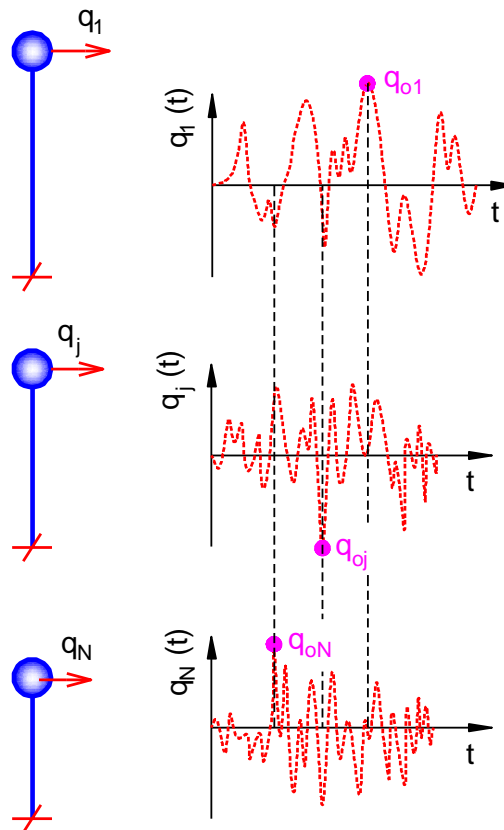


Figura 31. Valores máximos y mínimos de las coordenadas modales, $q_j(t)$, usados para determinar la contribución de cada modo al vector de desplazamientos \mathbf{u} .

A partir de lo expuesto, deducimos que el análisis modal espectral permite determinar la respuesta máxima o mínima de cada modo para cualquier parámetro de respuesta estructural, r_{oj} . Desde el punto de vista del diseño estructural nos interesa determinar el valor máximo total de la respuesta estructural (considerando el efecto de todos los modos), esto es:

$$r_o = \pm \max |r(t)| \quad (112)$$

El signo “ \pm ” indica que los valores probables de la respuesta total pueden ser positivos o negativos, debido a que la vibración en una dirección determinada puede producirse alternativamente en uno y otro sentido.

No es correcto obtener los valores de r_o a partir de sumar las contribuciones de cada modo, r_{oj} , debido a que los valores máximos o mínimos de la respuesta modal ocurren en distintos instantes, e incluso la respuesta combinada, $r(t)$, tiene su valor máximo o mínimo en otro instante, como se ilustra en la Figura 32. En la próxima sección analizaremos distintos criterios que se emplean para determinar la respuesta total de un parámetro estructural a partir de las contribuciones modales

calculadas mediante un espectro, permitiendo así la aplicación práctica del análisis modal espectral.

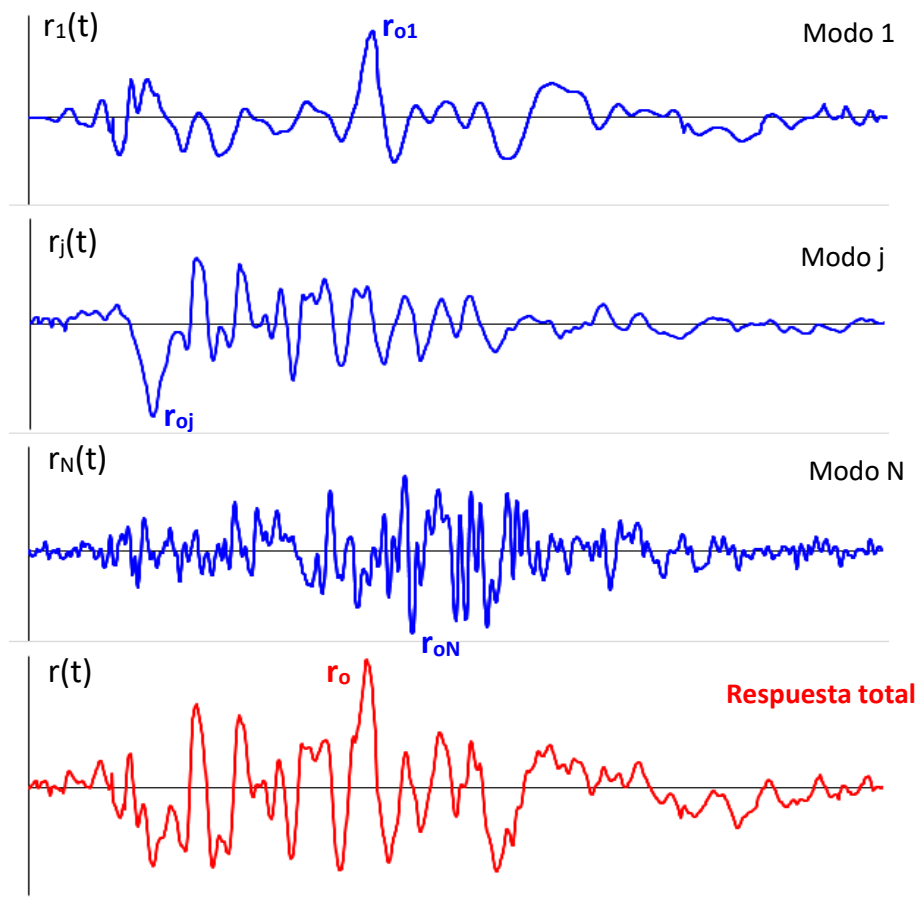


Figura 32. Variación temporal de las contribuciones modales y de la respuesta total de un parámetro estructural cualquiera.

8.2 Reglas de combinación modal

En la década de 1950 el análisis dinámico comienza a emplearse como una herramienta para el cálculo y diseño de estructuras sismorresistentes. Para aplicar en forma práctica el análisis modal espectral se propuso inicialmente un criterio en el que el valor de diseño de un parámetro de respuesta, r_o , se determina como la suma de los valores absolutos de las contribuciones modales:

$$r_o \simeq \pm \sum_{j=1}^N |r_{oj}| \quad (113)$$

Este criterio representa un límite superior al valor real, debido a que asume que todos los valores extremos se producen en forma simultánea, por lo que resulta en valores muy conservadores. Es por ello que se han desarrollado procedimientos alternativos, basados en la teoría de vibraciones aleatorias, que buscan determinar en forma aproximada el valor extremo probable de un parámetro de respuesta a partir de la combinación de las contribuciones modales.

En 1953, Goodman, Rosenblueth y Newmark propusieron un criterio basado en determinar la respuesta total como la raíz cuadrada de la suma de cuadrados de las contribuciones modales. Este

criterio se conoce como regla SRSS (por la sigla en inglés de *Square Root of the Sum of the Squares*):

$$r_o \simeq \pm \sqrt{\sum_{j=1}^N r_{0j}^2} \quad (114)$$

La regla SRSS resulta en valores adecuados para estructuras bidimensionales, cuyos modos de vibración presentan frecuencias propias bien separadas (lo cual puede considerarse que ocurre cuando dos frecuencias consecutivas difieren en más del 20% aproximadamente). Cuando estas condiciones no se cumplen, por ejemplo, en estructuras tridimensionales de edificio, los valores obtenidos a partir de la Ecuación 114 pueden ser menores que los valores reales. Por esta razón se han propuesto otros criterios. Uno de los más utilizados actualmente es el criterio, propuesto en 1969 por Rosenblueth y Elorduy que se basa en una combinación completa de todas las contribuciones modales, incluyendo en la combinación una doble sumatoria con N^2 términos, y por ello se denomina regla CQC (por las siglas en inglés de *Complete Quadratic Combination*)

$$r_o \simeq \pm \sqrt{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \rho_{jk} r_{oj} r_{ok}} \quad (115)$$

donde ρ_{jk} es un coeficiente de correlación modal. Se han propuesto distintas ecuaciones para calcular este factor de correlación. Una de las más utilizadas en la actualidad es la ecuación desarrollada por Der Kiureghian en 1980, en la cual el valor de ρ_{jk} depende del factor de amortiguamiento considerado en cada modo y de la relación de frecuencias $\beta_{jk} = \omega_j / \omega_k$:

$$\rho_{jk} = \frac{8\sqrt{\xi_j \xi_k} (\xi_j + \beta_{jk} \xi_k) \beta_{jk}^{3/2}}{(1 - \beta_{jk}^2)^2 + 4\xi_j \xi_k \beta_{jk} (1 + \beta_{in}^2) + 4(\xi_j^2 + \xi_k^2) \beta_{jk}^2} \quad (116)$$

El coeficiente de correlación varía entre 0 (cuando $\beta_{jk}=0$ o cuando β_{jk} tiende a ∞) y un valor menor o igual que 1 (cuando $\beta_{jk}=1$). Para el caso usual en el que se adopta un único valor del factor de amortiguamiento para todos los modos, $\xi_j = \xi_k = \xi$, la Ecuación 116 se simplifica:

$$\rho_{jk} = \frac{8\xi^2 (1 + \beta_{jk}) \beta_{jk}^{3/2}}{(1 - \beta_{in}^2)^2 + 4\xi^2 \beta_{jk} (1 + \beta_{jk})^2} \quad (117)$$

En la Figura 33 se presenta la variación del coeficiente de correlación para distintos valores del factor de amortiguamiento, calculado según la Ecuación 117. Se observa que el coeficiente de correlación tiene un valor máximo de 1, cuando $\beta_{jk}=1$, y decrece rápidamente para otros valores de la relación de frecuencia β_{jk} . Para el caso $\xi=0.05$ (consideración usual en el análisis dinámico de estructuras), el coeficiente de correlación es de aproximadamente 0.2 cuando las frecuencias modales difieren en más del 20%.

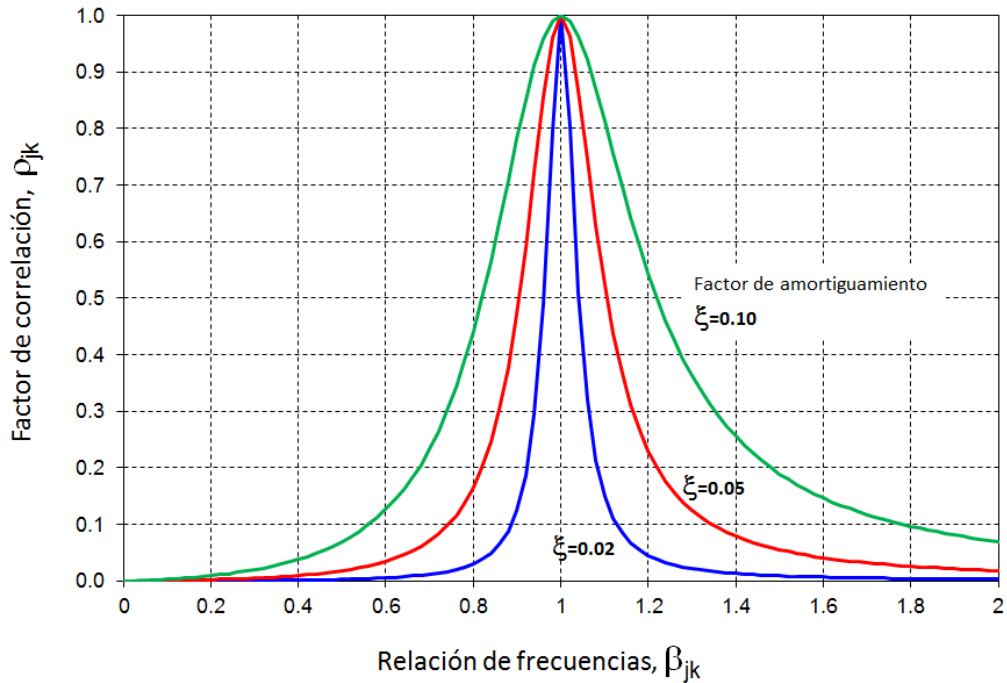


Figura 33. Variación del coeficiente ρ_{jk} en función de la relación de frecuencias, según la Ecuación 117.

A los efectos de comparar las reglas de combinación modal SRSS y CQC, la Ecuación 115 puede reordenarse considerando que $\rho_{jk} = 1$ cuando $j=k$ (y por lo tanto $\beta_{jk} = 1$), de modo que:

$$r_o \simeq \pm \sqrt{\sum_{j=1}^N r_{oj}^2 + \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \rho_{jk} r_{oj} r_{ok}} \quad (118)$$

La primera sumatoria, en la Ecuación 118, es igual a la combinación SRSS (cuyos términos son siempre positivos); la doble sumatoria incluye los términos cruzados ($j \neq k$) que pueden ser positivos o negativos dependiendo del signo de r_{oj} y r_{ok} . De modo que la regla CQC conduce a valores que son mayores o menores que los obtenidos mediante la regla SRSS. Puede demostrarse, sin embargo, que el valor final dentro de la raíz cuadrada (Ecuación 117 o 118) es siempre positivo. La Ecuación 118 indica, además, que cuando las frecuencias modales están bien separadas entre sí, los coeficientes de correlación cruzados ($j \neq k$) son muy reducidos y por lo tanto la regla CQC se aproxima a la SRSS.

Las Ecuaciones 113, 114, 115 y 118 incluyen el doble signo “ \pm ” para indicar que los valores de los parámetros de respuesta pueden ser positivos o negativos. Este aspecto debe tenerse en cuenta cuando se determinan las sollicitaciones de diseño para verificaciones que incluyen dos o más parámetros estructurales, como ocurre por ejemplo en columnas sometidas a flexión compuesta.

8.3 Resumen del análisis modal espectral y comparación

A partir de lo expuesto previamente, la aplicación del análisis modal espectral a una estructura lineal de N GDL con amortiguamiento puede resumirse en las siguientes etapas principales:

1. Modelo de la estructura como un sistema de N GDL y determinación de las frecuencias propias

- (autovectores) y modos de vibración (autovectores) a partir de las matrices de masa y rigidez.
2. Cambio de coordenadas para desacoplar el sistema. Esto implica transformar el modelo de la estructura real en un modelo equivalente formado por N osciladores de 1 GDL.
 3. Determinación de los valores extremos de las coordenadas modales, q_{oj} , aplicando para ello un espectro de respuesta (caso de un terremoto determinado) o un espectro de diseño, Ecuación 106 o Ecuación 108.
 4. Cálculo de las contribuciones modales al vector de desplazamientos, \mathbf{u}_{oj} , Ecuación 107, y alternativamente al vector de aceleraciones, $\ddot{\mathbf{u}}_{oj}$.
 5. Cálculo de todos los parámetros de respuestas requeridos en el análisis. Esta determinación debe realizarse para cada modo a partir de los desplazamientos, \mathbf{u}_{oj} , o de las fuerzas equivalentes determinadas según la Ecuación 111. Luego, se aplican una regla de combinación modal adecuada al caso que se analiza (Ecuaciones 114 o 115) para obtener el valor probable de los parámetros de respuesta.

Es importante resaltar las diferencias entre el análisis modal temporal (ver Sección 7) y el espectral. Las etapas 1 y 2 son comunes a ambos procedimientos, mientras que la etapa 3 es significativamente diferente debido a que en el primero se aplica un método de integración en el tiempo para resolver las ecuaciones de equilibrio y en el segundo se determinan los valores extremos mediante un espectro (sin conocer la variación temporal). La etapa 4 es conceptualmente similar en ambos procedimientos porque se aplica la transformación modal $\mathbf{u}=\Phi\mathbf{q}$. Sin embargo, se presentan variaciones en la aplicación práctica: en el análisis modal temporal se determinan los desplazamientos totales $\mathbf{u}(\mathbf{t})$, mientras que en el análisis modal espectral se calculan por separado los valores extremos de las contribuciones modales \mathbf{u}_{oj} . En la etapa 5 se aplica, en ambos procedimientos, el análisis estructural estático para determinar los parámetros de respuesta estructural, pero en el análisis modal espectral se debe aplicar una regla de combinación modal para obtener el valor probable de los parámetros de respuesta. En la Tabla 2 se presenta, en forma resumida, la comparación entre estos dos procedimientos.

8.4 Consideraciones adicionales y limitaciones del método

El método de análisis modal espectral es el procedimiento más empleado en la práctica para el análisis dinámico de estructuras sismorresistentes; es por ello que resulta necesario conocer sus limitaciones. En primer lugar, hay que considerar que este procedimiento no es aplicable para el caso de acción sísmica multicomponente (cuando se consideran que el sismo actúa en dos o más direcciones simultáneas, Sección 5.2) o de excitación multisoporte (la acción sísmica no es la misma en todos los vínculos de la estructura, Sección 5.3). Para estos casos particulares se han desarrollado modificaciones y procedimientos aproximados, cuyo desarrollo y explicación exceden los alcances de esta publicación.

Tabla 2. Comparación de los dos procedimientos usuales para el análisis modal.

Etapa	Análisis modal temporal	Análisis modal espectral
1	Formulación del modelo estructural con N GDL (vector \mathbf{u}) $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = -\mathbf{m} \mathbf{1} \ddot{u}_g(t)$ Determinación de las frecuencias propias y modos de vibración a partir de las matrices de masa y rigidez $[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \boldsymbol{\phi} = [\mathbf{k} - \lambda \mathbf{m}] \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$	
2	Cambio de coordenadas para desacoplar el sistema → N osciladores de 1 GDL	
3	Determinación de las coordenadas modales, $q_j(t)$, mediante integración temporal, para un terremoto (acelerograma) $\ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = -\Gamma_j \ddot{u}_g(t)$	Determinación de los valores extremos de las coordenadas modales, q_{oj} mediante un espectro $q_{oj} = \Gamma_j S_{Dj} = \Gamma_j \frac{S_{Aj}}{\omega_j^2}$
4	Cálculo del vector de desplazamientos, $\{u(t)\} = [\boldsymbol{\phi}] \{q(t)\}$	Cálculo de las contribuciones modales al vector de desplazamientos, \mathbf{u}_{oj} $\{u_o\}_j = \{\boldsymbol{\phi}\}_j q_{jo}$
5	Determinación de los parámetros de respuesta mediante análisis estructural estático, $r(t)$. Estos parámetros son funciones temporales.	Determinación de los parámetros de respuesta mediante análisis estructural estático para cada modo, r_{oj}
		Cálculo del valor probable de los parámetros de respuesta mediante una regla de combinación modal, r_o

En la formulación de las ecuaciones del análisis modal hemos considerado que el número de modos a incluir en el análisis es igual al número de GDL dinámicos definidos en el modelo, esto es $N=NGL$. Sin embargo, en el caso de estructuras complejas con un elevado número de GDL es usual considerar en el análisis modal un número menor de modos de vibración, de modo que $N < NGL$. Esta simplificación se basa en el hecho de que algunos modos de vibración movilizan una masa muy reducida y su aporte a la respuesta total puede despreciarse. Para cuantificar este aspecto y definir un criterio de aplicación práctica, los reglamentos usualmente indican que se debe considerar un número mínimo de modos de vibración de modo tal que se incluya en el análisis modal al menos el 90% de la masa total de la construcción. Para verificar esta condición se determina la masa efectiva de cada modo (Ecuación 103) y se incluyen tantos modos como se necesarios para cumplir la condición reglamentaria.

En el análisis modal espectral, todos los parámetros de respuestas deben obtenerse mediante la combinación modal (según alguna regla determinada) de los parámetros de respuesta calculados para cada modo de vibración, según se explicó previamente. No es correcto, desde el punto de vista conceptual, determinar las fuerzas sísmicas f_s mediante combinación de las componentes modales y luego realizar un análisis estático para obtener todas las solicitaciones y desplazamientos de la

estructura. La aplicación de este procedimiento, si bien es más simple, no se corresponde con el análisis dinámico modal espectral; podría interpretarse como una determinación dinámica de las fuerzas sísmicas equivalentes que se combina con una determinación estática de los parámetros de respuesta.

Finalmente, es importante mencionar algunas limitaciones del análisis modal espectral que tienen relación directa con su aplicación al diseño sismorresistente. Este procedimiento representa una aproximación a la respuesta dinámica de la estructura y solo permite obtener valores máximos de los parámetros estructurales. Así por ejemplo, todos los desplazamientos laterales son valores máximos positivos (que ocurren en tiempos diferentes), de modo que un gráfico de la posición deformada no tiene significado físico real. Con igual criterio, estos desplazamientos máximos probables no permiten determinar adecuadamente los valores de la distorsión de piso, que usualmente se emplea como parámetro de control en la mayoría de los reglamentos de diseño (recordar que la distorsión de piso se determina a partir del desplazamiento lateral relativo en un nivel y el inferior).

Un problema similar se presenta para el diseño de componentes sometidos a dos o más esfuerzos (por ejemplo, columnas en flexión compuesta o vigas en flexión biaxial), los cuales se dimensiona o verifica considerando que los valores de dichos esfuerzos actúan en forma simultánea (M_x+P , o M_x+M_y+P , o M_x+M_y). Sin embargo, los valores máximos obtenidos del análisis no se producen al mismo tiempo y no se conoce su signo.

9. EJEMPLO DE APLICACIÓN

En esta sección desarrollaremos un ejemplo numérico para aplicar el análisis modal espectral a un pórtico plano de 3 niveles sometido a la acción sísmica definida por el Reglamento INPRES-CIRSOC 103, Parte 1, con un factor de amortiguamiento de 5%. Las masas se concentran en correspondencia con cada uno de los niveles del pórtico, de modo que consideramos un sistema de 3 GDL dinámicos, ver Figura 34. Las matrices de rigidez y masa se determinan según los criterios indicados en la Sección 4; los valores obtenidos para este ejemplo son:

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} 123110 & -69510 & 14400 \\ -69510 & 97550 & -45340 \\ 14400 & -45340 & 33120 \end{bmatrix} (kN / m) \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 20.4 & 0 & 0 \\ 0 & 20.4 & 0 \\ 0 & 0 & 15.3 \end{bmatrix} (kNs^2/m)$$

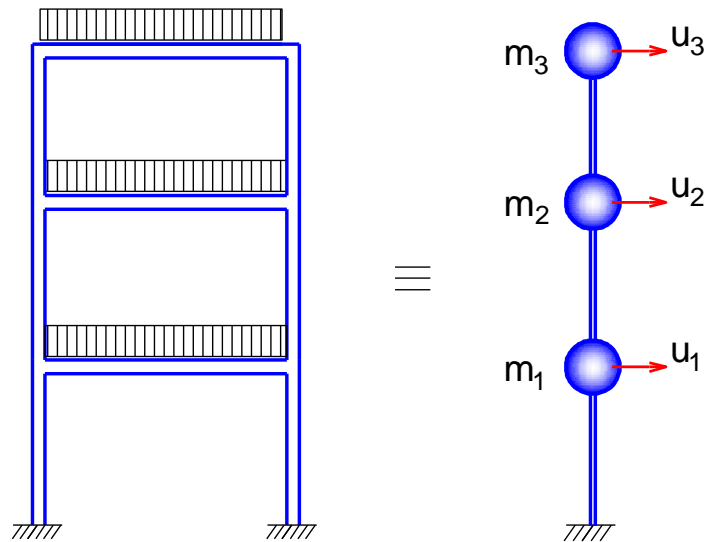


Figura 34. Estructura y modelo a considerar en el ejemplo de aplicación.

A partir de estas las matrices \mathbf{k} y \mathbf{m} , podemos determinar la matriz modal mediante los procedimientos usuales del álgebra lineal, como así también los autovalores, $\lambda = \omega^2$, las frecuencias modales, ω , y los periodos modales, T :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0.059 & 0.148 & -0.154 \\ 0.138 & 0.096 & 0.145 \\ 0.188 & -0.155 & -0.077 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \omega^2 = \begin{Bmatrix} 291.72 \\ 3097.24 \\ 9592.40 \end{Bmatrix} (1/s^2) \quad \omega = \begin{Bmatrix} 17.08 \\ 55.65 \\ 97.94 \end{Bmatrix} (1/s) \quad T = \begin{Bmatrix} 0.368 \\ 0.113 \\ 0.064 \end{Bmatrix} (s)$$

El siguiente paso consiste en aplicar la transformación modal (cambio de coordenadas) y determinar la matriz de rigidez modal o generalizada, \mathbf{K} , y de masa modal o generalizada, \mathbf{M} :

$$\mathbf{K} = \Phi^T \mathbf{k} \Phi = \begin{bmatrix} 291.72 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 3097.24 & 0.02 \\ 0.00 & 0.02 & 9592.40 \end{bmatrix} (kN / m)$$

$$\mathbf{M} = \Phi^T \mathbf{m} \Phi = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix} (kNs^2 / m)$$

Se verifica que estas dos matrices son diagonales, lo cual es totalmente coherente con las propiedades de ortogonalidad descritas en la Sección 6.1.3. En este ejemplo, los modos están normalizados con respecto a la matriz de masa, razón por la cual la matriz de masa modal es unitaria.

$$\mathbf{L} = \Phi^T \mathbf{m} \mathbf{1} = \begin{Bmatrix} 6.886 \\ 2.609 \\ -1.368 \end{Bmatrix} (kNs^2 / m) \quad \Gamma = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{L} = \begin{Bmatrix} 6.886 \\ 2.609 \\ -1.368 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M}^* = \begin{Bmatrix} L_j^2 \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 47.42 \\ 6.81 \\ 1.87 \end{Bmatrix} (kNs^2 / m)$$

La transformación modal permite desacoplar el sistema de ecuaciones diferenciales para plantear tres ecuaciones independientes de 1 GDL (en coordenadas modales). Estas ecuaciones pueden plantearse sin la necesidad de determinar la matriz de amortiguamiento considerando el factor de amortiguamiento de 5% (valor usual definido por el reglamento). De modo que para este caso (ver Ecuación 92):

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + 2 \cdot 0.05 \cdot 17.08 \frac{1}{s} \dot{q}_1 + 291.72 \frac{1}{s^2} q_1 &= -6.886 \ddot{u}_g(t) \\ \ddot{q}_2 + 2 \cdot 0.05 \cdot 55.65 \frac{1}{s} \dot{q}_2 + 3097.24 \frac{1}{s^2} q_2 &= -2.609 \ddot{u}_g(t) \\ \ddot{q}_3 + 2 \cdot 0.05 \cdot 97.94 \frac{1}{s} \dot{q}_3 + 9592.40 \frac{1}{s^2} q_3 &= 1.368 \ddot{u}_g(t) \end{aligned}$$

La resolución de las tres ecuaciones previas permite obtener la respuesta temporal para un terremoto determinado (definido por un registro de aceleraciones del terreno $\ddot{u}_g(t)$).

Alternativamente, podemos resolver el mismo problema pero mediante la aplicación del análisis modal espectral, para así determinar la respuesta máxima para cada modo utilizando el espectro de diseño definido en el reglamento de aplicación. Para facilitar la comprensión de las operaciones matemáticas involucradas en la resolución de este ejemplo empleamos una planilla de cálculo. En esa planilla se pueden seguir el proceso de cálculo y modificar algunos datos para analizar el efecto de esos cambios (ver documento adjunto: [ISR-Portico 3P-Modal.xlsx](#)).

BIBLIOGRAFÍA

- Chopra, A. Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineer. Prentice Hall, Inc., 4^{ta} Edición. 2012.
- Clough, R. W. y Penzien, J. Dynamics of Structures. Computers & Structures Inc. Second Revised Edition. 2010
- Crisafulli, F. J. Diseño Sismorresistente de Estructuras de Acero. ALACERO. 5ta Ed. <https://www.alacero.org/>. 2018
- Paz, M. Structural Dynamics-Theory and Computation. Sixth Edition. Van Nostrand Reinhold. 2019.