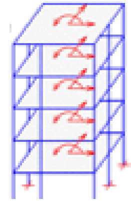
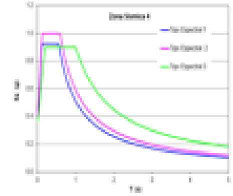
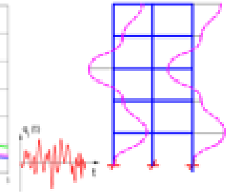
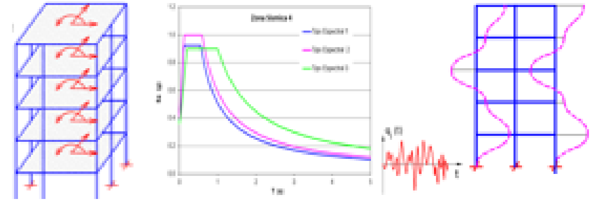






Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

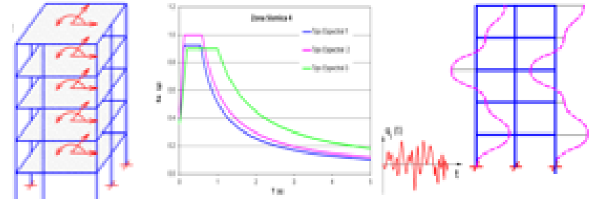
Dr. Francisco Crisafulli
Profesor Titular
Marzo 2024



Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

Sistemas de 1 grado de libertad son aquellos cuya respuesta dinámica puede determinarse (con aceptable precisión) considerando una sola coordenada (o desplazamiento) para definir la configuración deformada o posición del sistema en un instante dado.

La fotografía muestra un tanque elevado, donde la mayoría de la masa se puede suponer concentrada en el nivel superior, de modo que este tanque puede modelarse como un sistema de 1GdL.



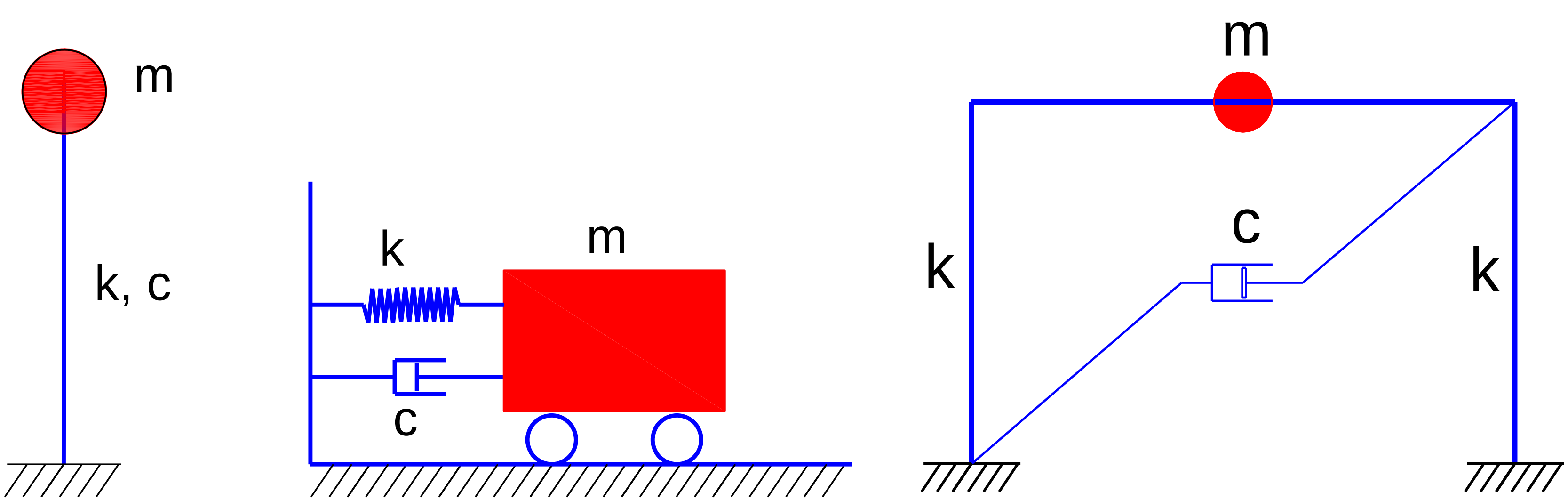
Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

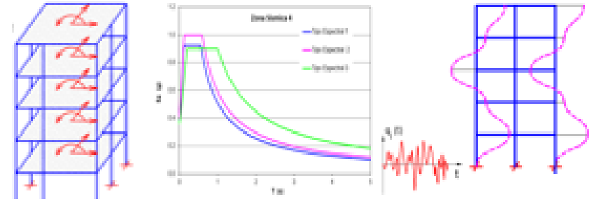
Comportamiento lineal

Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

Esquemas usuales para representar un sistema de 1 GdL.
Las propiedades principales a considerar son:

- La rigidez de la estructura, k, en la dirección del desplazamiento considerado.
- La masa, m, de elementos estructurales y no estructurales asociada al grado de libertad.
- El amortiguamiento, c, de las vibraciones, debido a procesos internos de disipación de energía.



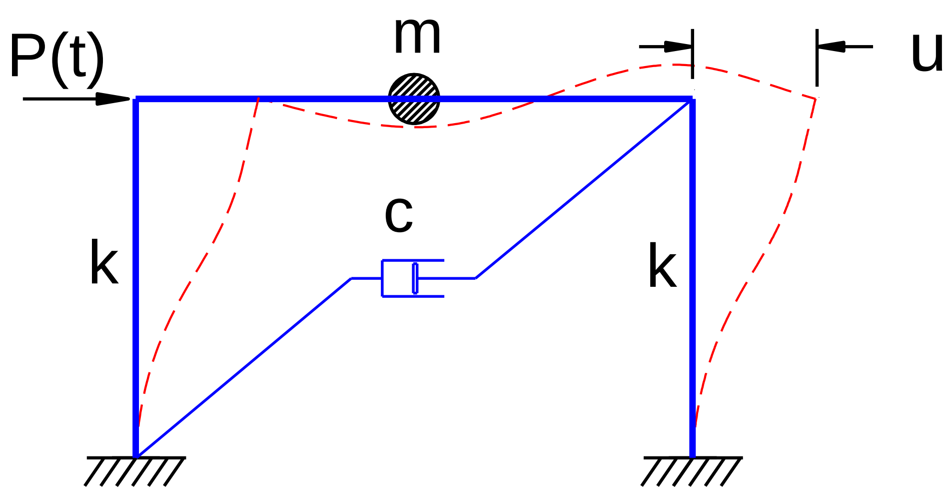


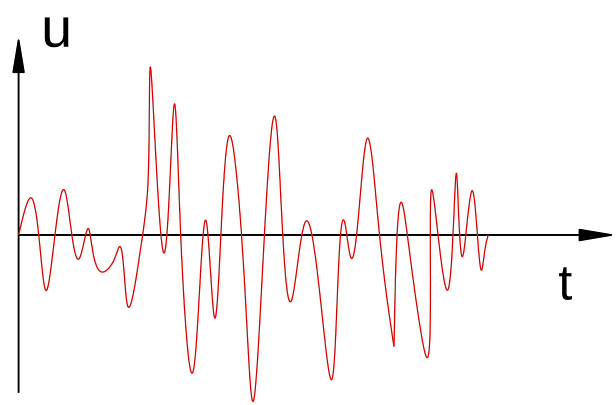
Amortiguamiento de las vibraciones

La experiencia indica que, si una estructura vibra libremente, la amplitud de esa vibración disminuye paulatinamente debido a un efecto que se denomina amortiguamiento. Las causas de este fenómeno son debidas a distintos mecanismos de disipación energía, tales como fricción interna en las fisuras o en las conexiones.

En el modelo matemático, este efecto de disipación se representa en forma aproximada, mediante amortiguamiento viscoso, en el que las fuerzas disipativas son directamente proporcionales a la velocidad. Esta representación es conveniente desde el punto de vista matemático, pero no refleja adecuadamente el fenómeno físico. No obstante, los resultados experimentales indican que esta hipótesis conduce a un modelo que representa aproximadamente bien la respuesta dinámica de las estructuras.

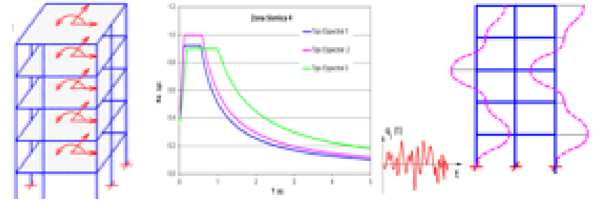
Formulación de la ecuación de equilibrio dinámico.





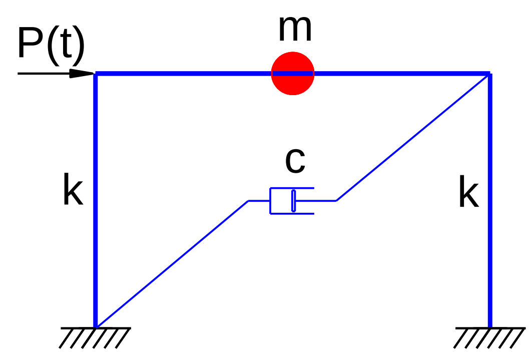
Por acción de la fuerza exterior variable en el tiempo, P(t), la estructura vibra y los desplazamientos u también varían en el tiempo. Como consecuencia, se originan velocidad y aceleración sobre el sistema.

$$velocidad: \frac{du}{dt} = \dot{u} \; ; \quad aceleración: \frac{d^2u}{dt^2} = \ddot{u}$$

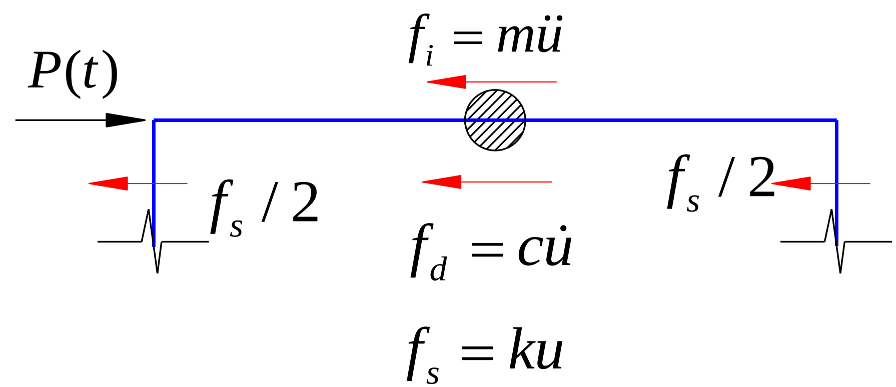


Formulación de la ecuación de equilibrio dinámico.

Para deducir la ecuación de movimiento se considera la condición de equilibrio dinámico (aplicación práctica de Principio de D´Alembert):



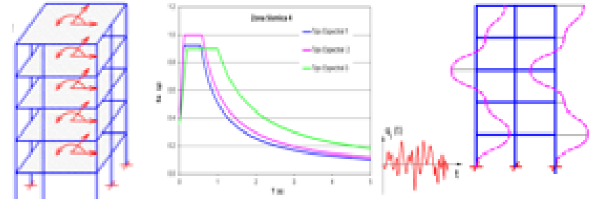
$$P(t) - f_i - f_d - f_s = 0$$



f_i: fuerza de inercia (Segunda Ley de Newton)

f_d: fuerza de amortiguamiento: se asume comportamiento viscoso para representar la disipación de energía por distintos mecanismos (fricción interna).

f_s: fuerza restitutiva: debida a la rigidez propia de la estructura. Si se asume comportamiento lineal y elástico, la fuerza restitutiva es directamente proporcional a la rigidez, f_s = k u



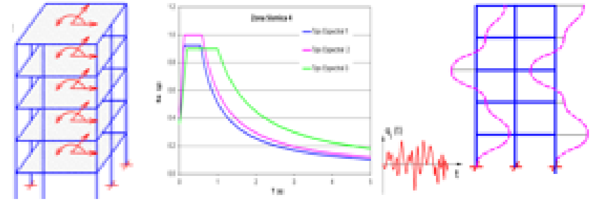
Formulación de la ecuación de equilibrio dinámico.

$$P(t) - f_i - f_d - f_s = 0$$

$$f_i + f_d + f_s = P(t)$$

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = P(t)}$$

Se asume comportamiento lineal de todo el sistema, por lo que m, c y k son constantes. Posteriormente, analizaremos el caso de que la fuerza restitutiva es nolineal, de modo que no hay proporcionalidad entre esta fuerza y el desplazamiento. En forma general, esta condición se indica como: $f_s = f_s\,(u)$, es decir que la fuerza restitutiva es función del desplazamiento y su valor debe determinarse en cada instante.

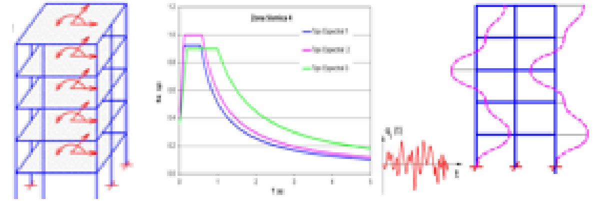


Formulación de la ecuación de equilibrio dinámico para acción sísmica

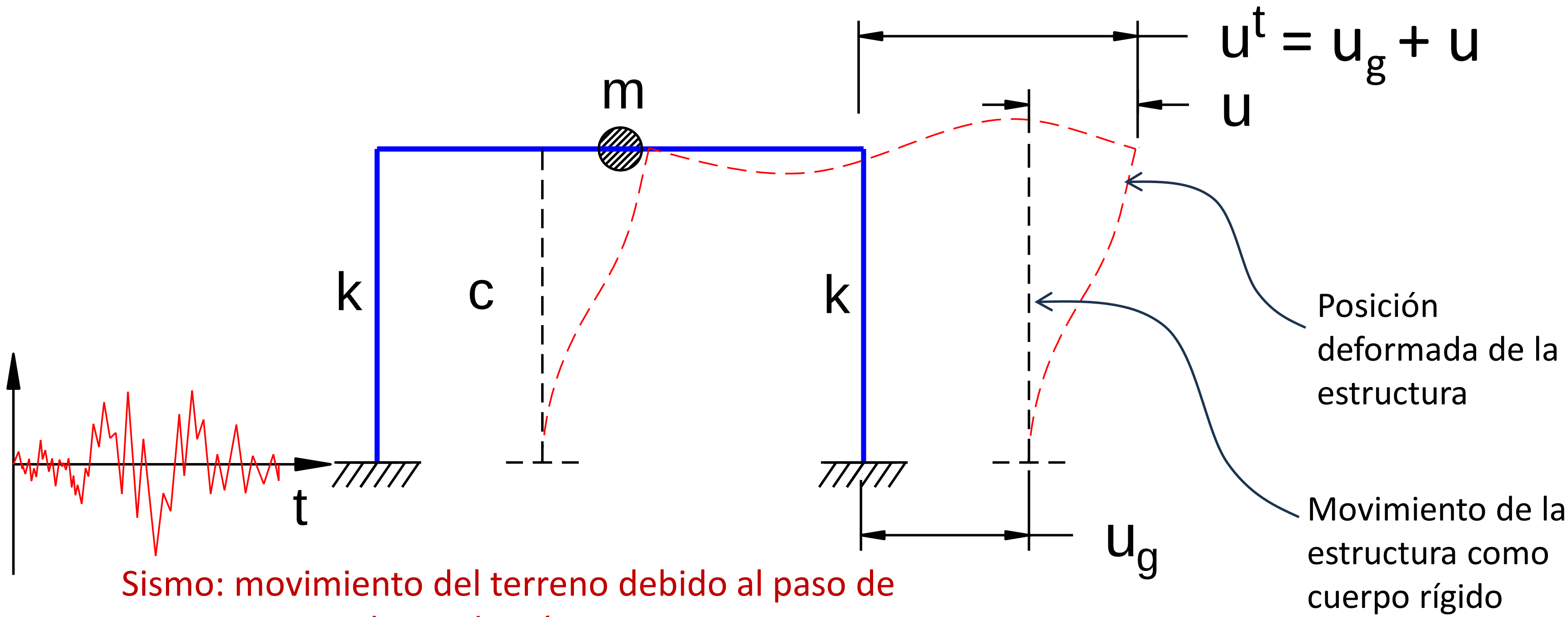
Las estructuras sometidas a sismos representan un caso particular de acción dinámica, en el que la fuerza exterior es nula.

La vibración se origina por el movimiento del suelo (fundaciones) debido al paso de las ondas sísmicas. De modo que, en este caso particular, tenemos que modificar la ecuación de equilibrio dinámico considerando que:

- La carga exterior es P(t) = 0
- El movimiento del sistema incluye un desplazamiento del terreno (movimiento en las fundaciones) más el movimiento debido a la deformación de la estructura.



Formulación de la ecuación de equilibrio dinámico para acción sísmica

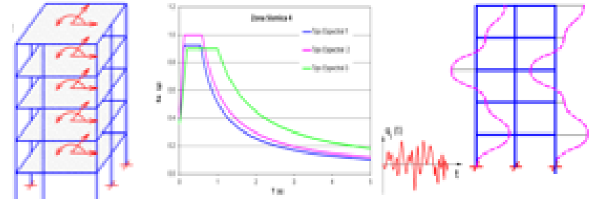


Sismo: movimiento del terreno debido al paso de las ondas sísmica.

u: desplazamiento lateral por deformación de la estructura

u_g: desplazamiento del terreno

u^t: desplazamiento total



Formulación de la ecuación de equilibrio dinámico para acción sísmica

La fuerza de inercia depende de la aceleración total, mientras que las fuerzas de amortiguamiento y restitutiva dependen de la velocidad y desplazamiento relativo. De modo que la ecuación de equilibrio para este caso, en el que la fuerza exterior es nula, resulta:

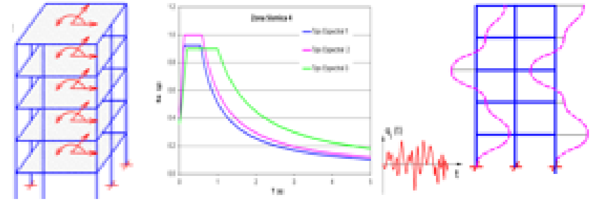
$$m\ddot{u}^t + c\dot{u} + ku = 0$$

La aceleración total es igual a: $\ddot{u}^t = \ddot{u}_g + \ddot{u}$ (la deriva de una suma es igual a la suma de las derivadas)

De modo que:

$$m(\ddot{u}_g + \ddot{u}) + c\dot{u} + ku = 0$$

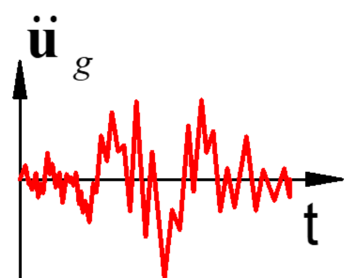
$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)}$$



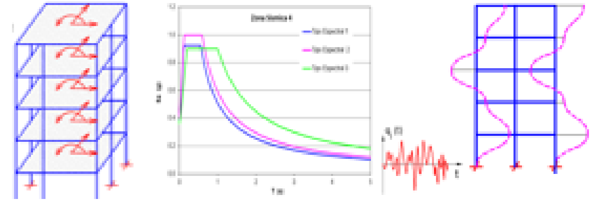
Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

Casos a considerar:

- Vibración libre: perturbación inicial (en t = 0s) $\rightarrow u(0) \neq 0; \quad \dot{u}(0) \neq 0$
- Vibración forzada con carga armónica: $P(t) = P_o \; sen \; \omega_n \; t$
- Vibración con carga impulsiva
- Vibración con acción sísmica:



Acelerograma



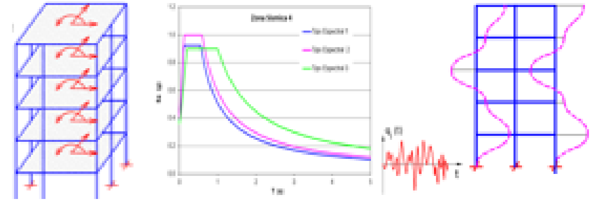
Sistemas de 1 grado de libertad dinámico – Vibración libre

La vibración libre resulta de aplicar una perturbación inicial (para t=0) que origina la vibración de la estructura.

Durante la vibración, la acción exterior es nula P(t) =0.

Condiciones iniciales:

- Desplazamiento inicial: $u(0) = u_o \neq 0$
- Velocidad inicial: $\dot{u}(0) = \dot{u}_o \neq 0$



Sistemas de 1 grado de libertad dinámico – Vibración libre

Sistema no amortiguado: $m\ddot{u} + ku = 0$

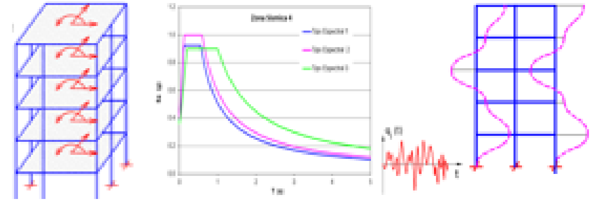
Resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden ordinarias homogéneas:

- Proponer una solución: $u(t) = e^{\lambda t}$
- Verificar si la solución propuesta verifica la ecuación diferencial y operar matemáticamente:

$$u(t) = A\ \cos \omega_n t + B\ sen\omega_n t$$

- Imponer condiciones de borde (para t=0):

$$u(t) = u(0)\ \cos \omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n} sen\omega_n t$$



Sistemas de 1 grado de libertad dinámico – Vibración libre

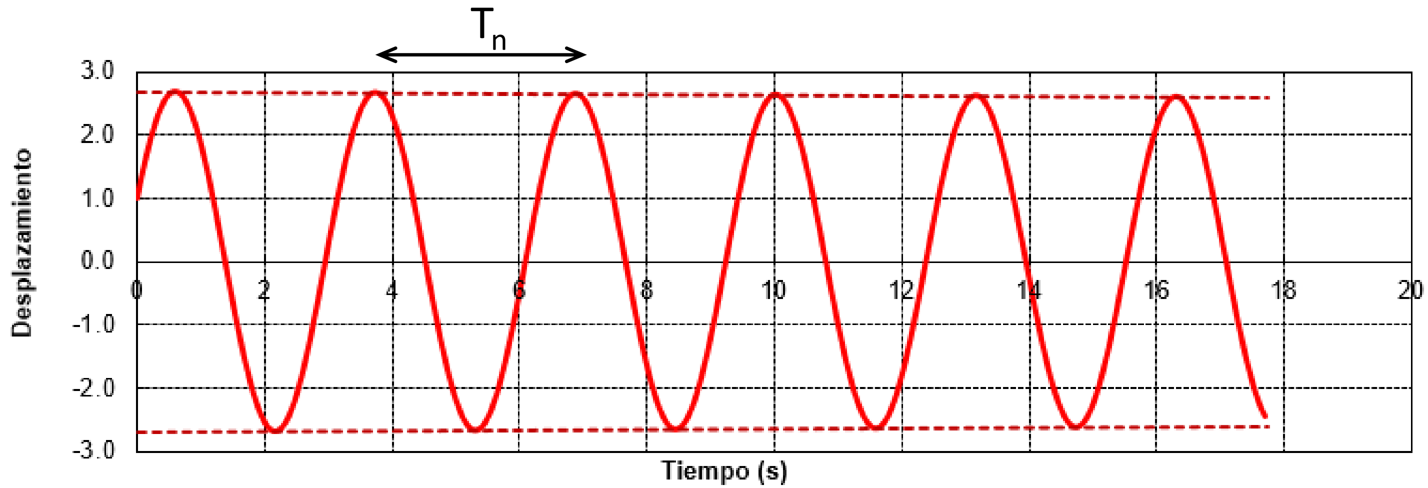
Sistema no amortiguado: $m\ddot{u} + ku = 0$

Frecuencia natural o frecuencia angular: $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ (rad/s o 1/s)

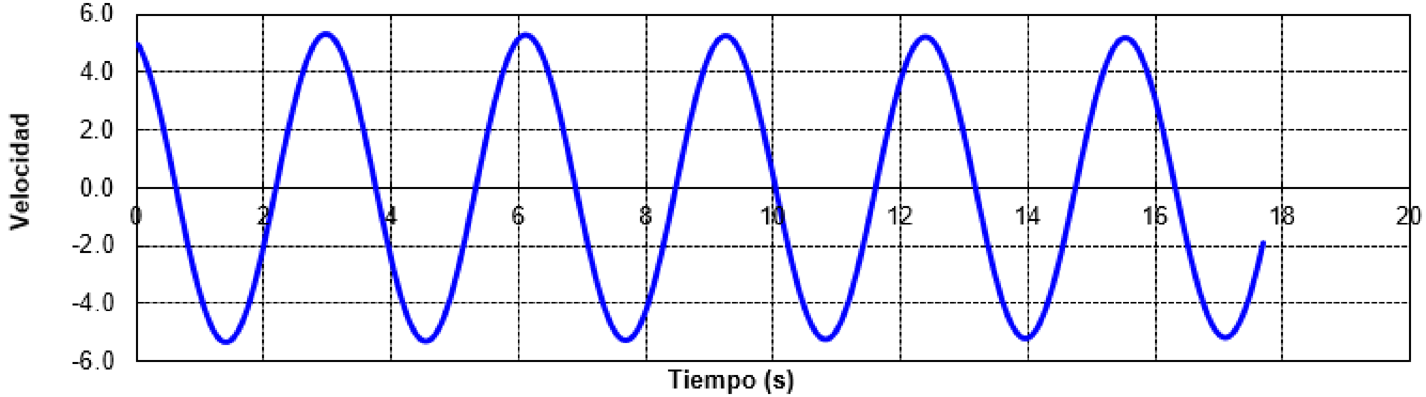
Periodo de vibración : $\mathrm{T_n} = \dfrac{2\pi}{\omega_n}$ (s)

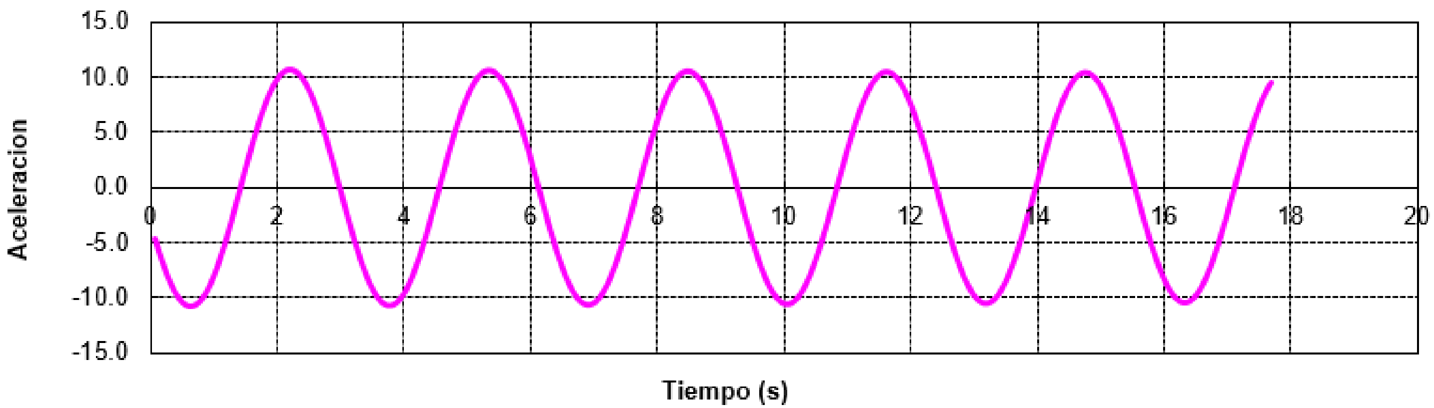
Frecuencia cíclica: $\mathrm{f_n} = \dfrac{\omega_n}{2\pi} = \dfrac{1}{\mathrm{T_n}}$ (Hz)

Sistemas de 1 grado de libertad dinámico – Vibración libre no amortiguada

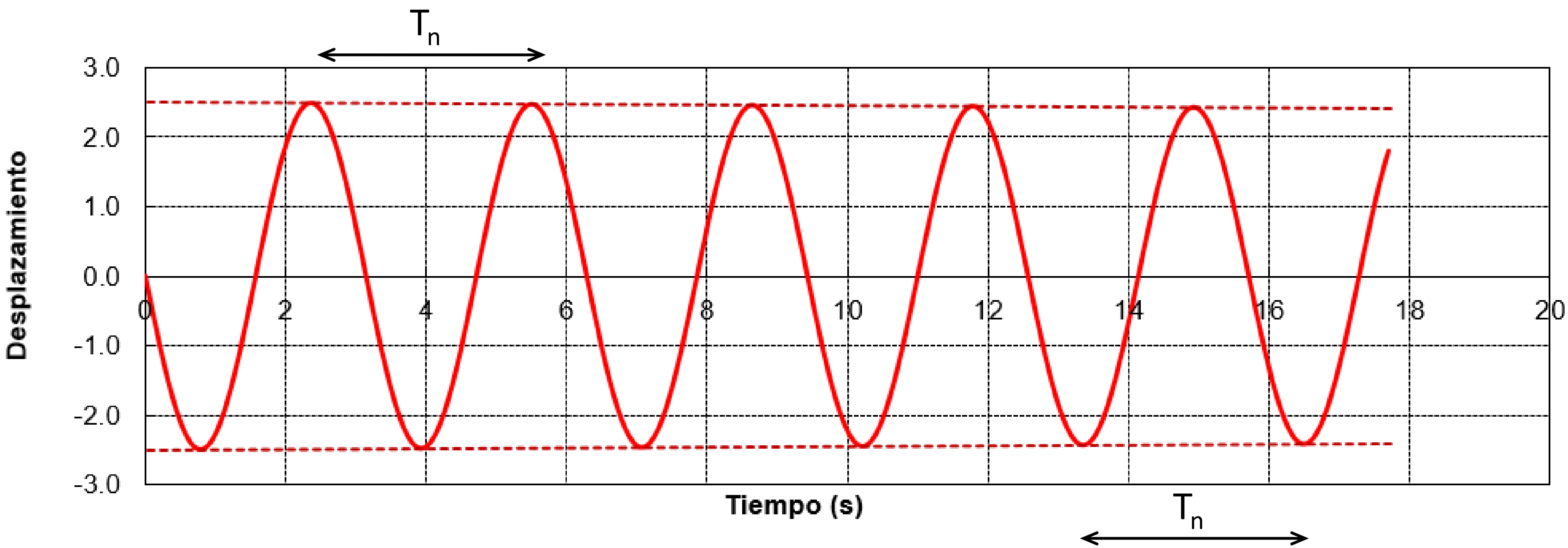


Despl. Inic. = 1
Vel. Inic.= 5
En el gráfico de desplazamientos, la pendiente representa la velocidad.

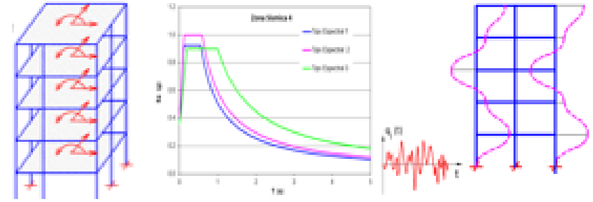




Sistemas de 1 grado de libertad dinámico – Vibración libre no amortiguada



Desplazamiento inicial = 0
Velocidad Inicial = -5



Sistemas de 1 grado de libertad dinámico – Vibración libre

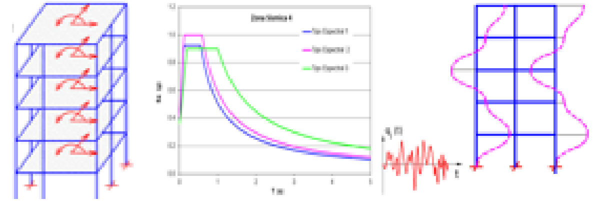
Sistema amortiguado: $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$

$$\ddot{u} + \frac{c}{m}\dot{u} + \frac{k}{m}u = 0$$

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n \; \dot{u} + \omega_n^2 \; u = 0$$

donde se introduce el factor de amortiguamiento: $\zeta = \dfrac{c}{c_{cr}} = \dfrac{c}{2m\omega_n}$

La ventaja radica en que este factor ζ puede determinarse experimentalmente, como veremos más adelante. Recordemos que el amortiguamiento c no puede calcularse analíticamente como si puede hacerse para determinar m y k.

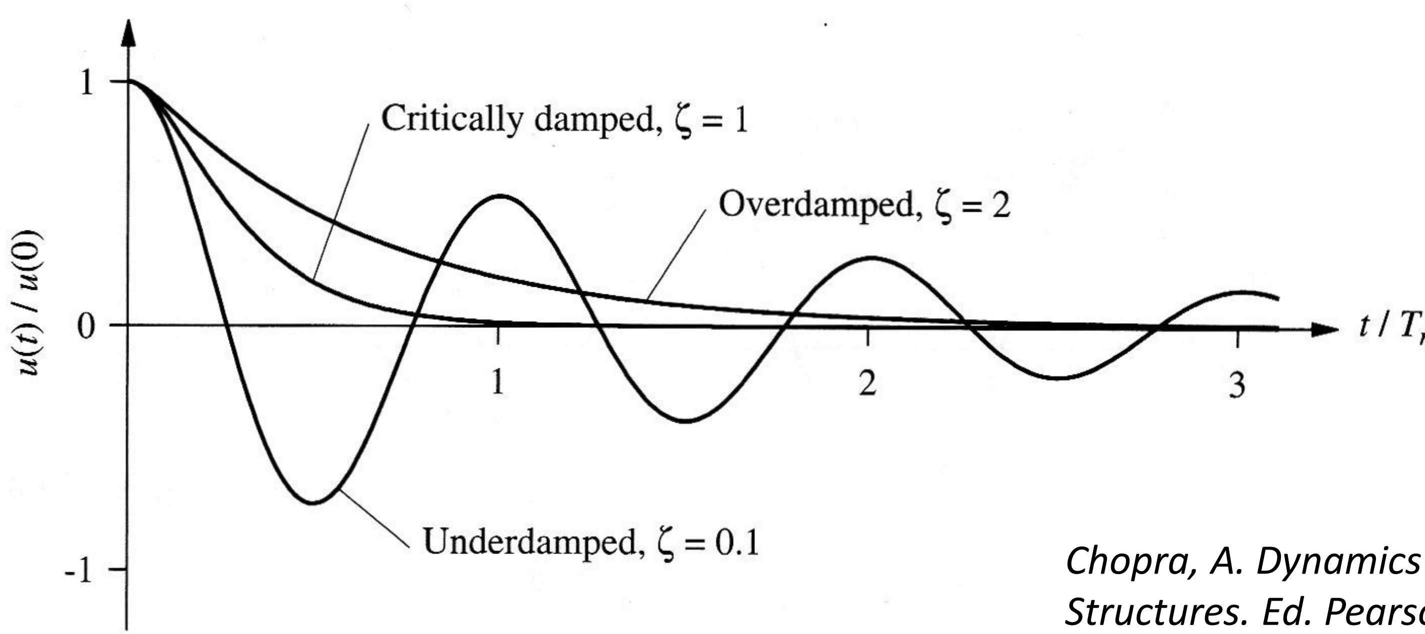


Sistemas de 1 grado de libertad dinámico – Vibración libre

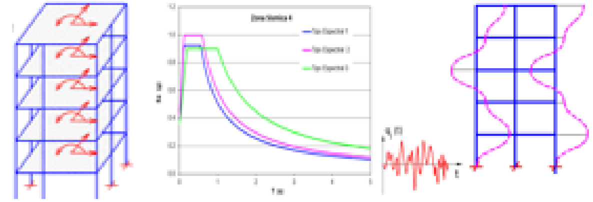
Sistema amortiguado: $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_n}$$

El factor de amortiguamiento puede ser mayor, igual o menor que 1. En los sistemas estructurales este factor es siempre menor que 1 (sistemas subamortiguados) $\rightarrow$ el sistema vibra, pero su amplitud decae en el tiempo.



Chopra, A. Dynamics of Structures. Ed. Pearson



Sistemas de 1 grado de libertad dinámico – Vibración libre

Sistema amortiguado: $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$

Siguiendo un procedimiento similar al indicado para sistemas no amortiguado, se obtiene la siguiente solución:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[u(0)\ \cos\omega_D t + \frac{\dot{u}(0) + \zeta\omega_n u(0)}{\omega_D} sen\omega_D t\right]$$

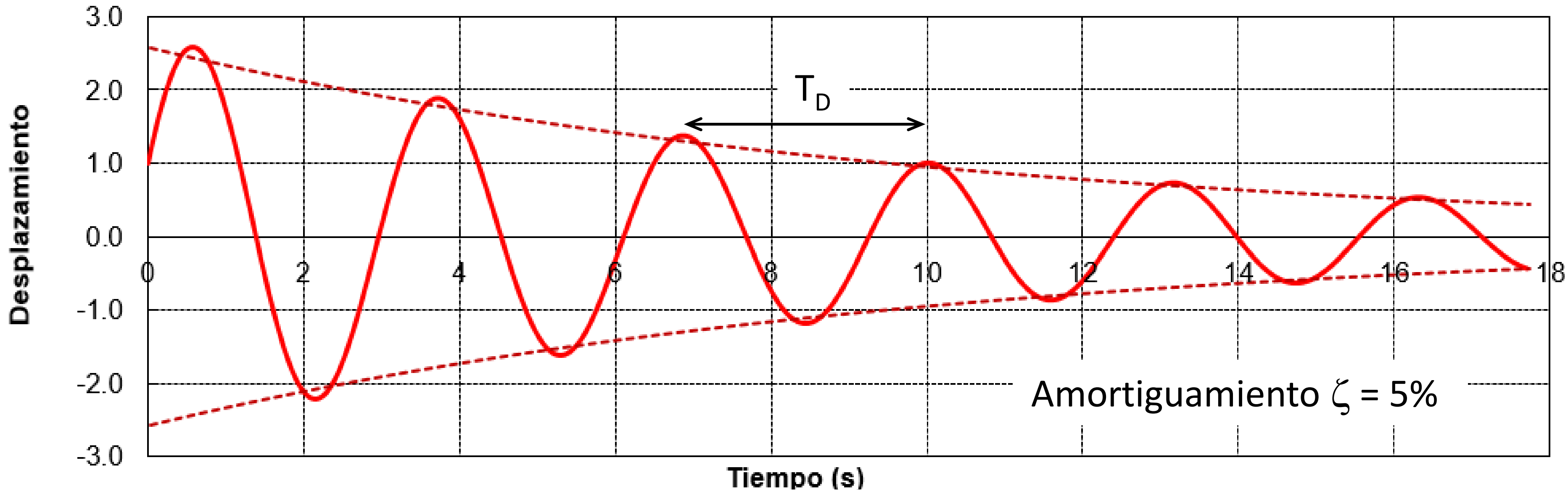
donde ω_D es la frecuencia natural amortiguada: $\omega_D = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\,;\ T_D = \dfrac{2\pi}{\omega_D}$

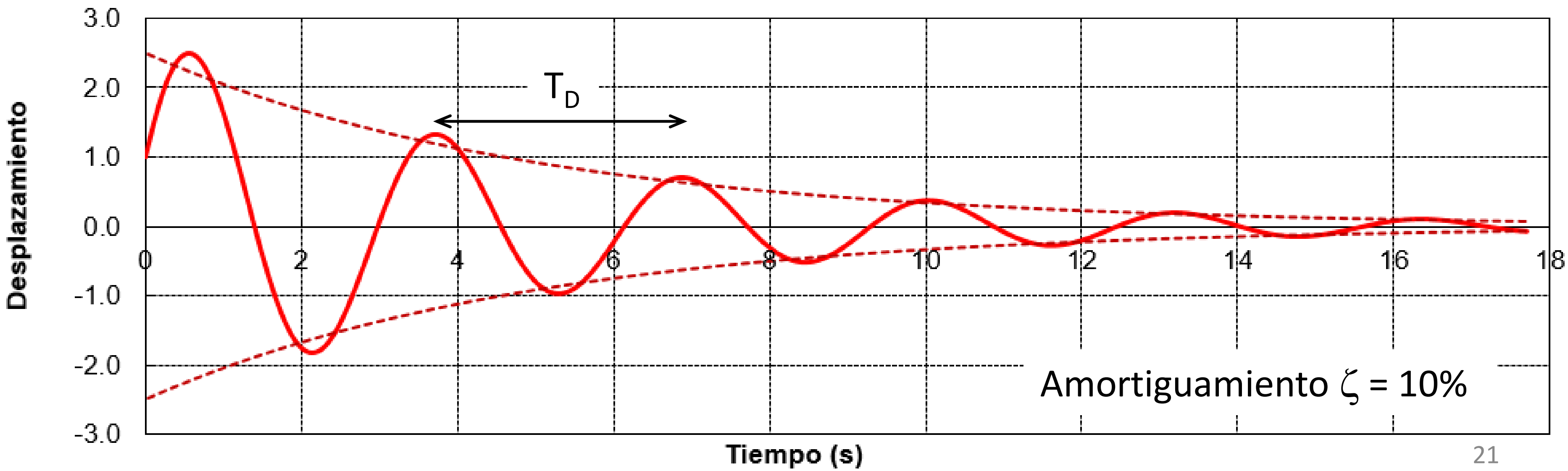
$\zeta = 2\% \rightarrow \omega_D = 0.9998\ \omega_n$
$\zeta = 5\% \rightarrow \omega_D = 0.9987\ \omega_n$
$\zeta = 10\% \rightarrow \omega_D = 0.9950\ \omega_n$

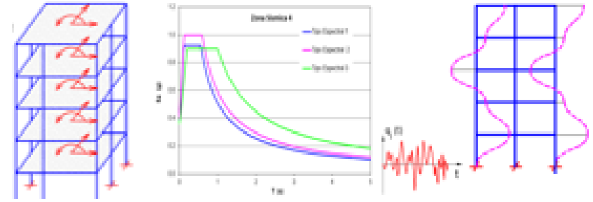
puede considerarse $\omega_D \simeq \omega_n ;\ T_D \simeq T_n$

Sistemas de 1 grado de libertad dinámico – Vibración libre no amortiguada

Desplazamiento inicial = 1, Velocidad Inicial = 5



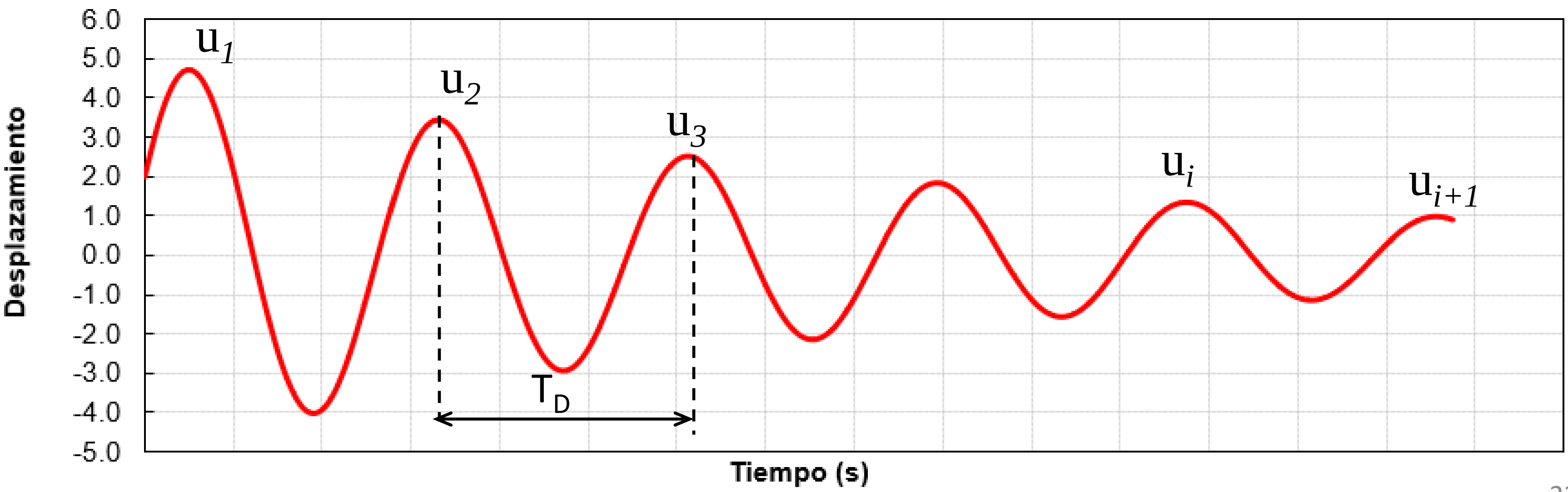


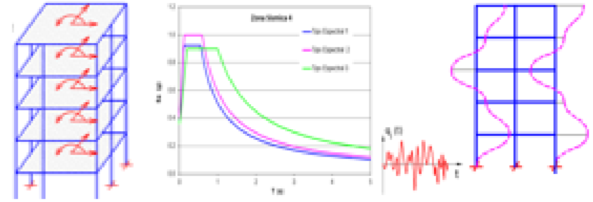


Sistemas de 1 grado de libertad dinámico – Vibración libre sistema amortiguado

Se define el decremento logarítmico de la vibración, δ, como el logaritmo de la relación entre dos valores sucesivos de máximo desplazamiento (separados por T_D):

$$\delta = \ln \frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \simeq 2\pi\zeta \qquad \text{(válida para valores de } \zeta < 20\%\text{)}$$



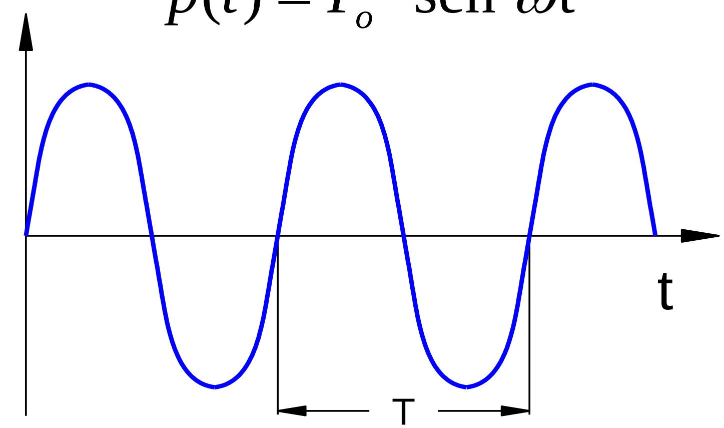


Sistemas de 1 grado de libertad dinámico - Vibración forzada

Sistema no amortiguado

$$m\ddot{u} + ku = P(t)$$

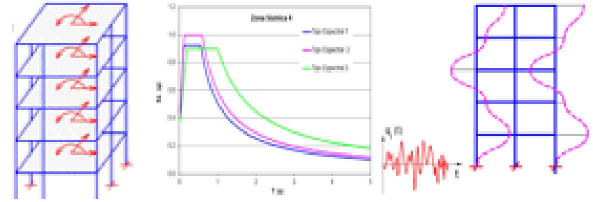
$$p(t) = P_o \ \text{sen}\ \omega t$$



Sistema amortiguado

$$m\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\ \dot{u} + \omega_n^2\ u = P(t)$$

P_o: amplitud de la fuerza exterior (excitación)
ω: frecuencia de la fuerza exterior
T = $2\pi/\omega$: periodo de la fuerza exterior

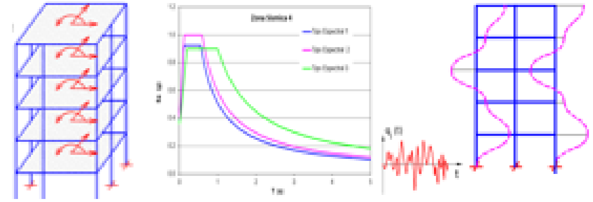


Sistemas de 1 grado de libertad dinámico - Vibración forzada

$$m\ddot{u} + ku = P(t) \qquad\qquad m\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\ \dot{u} + \omega_n^2\ u = P(t)$$

La solución de ecuaciones diferenciales de segundo orden ordinarias no homogénea puede determinarse a partir de los siguientes pasos:

- Proponer una solución, la que incluye dos partes:
  Solución particular, considerando P(t)=0 (vibración libre).
  Solución complementaria, que incluye la acción exterior P(t).
- Verificar si la solución propuesta verifica la ecuación diferencial.
- Imponer condiciones de borde para determinar las constantes de integración. Usualmente se asumen que el desplazamiento y velocidad inicial son nulos.



Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

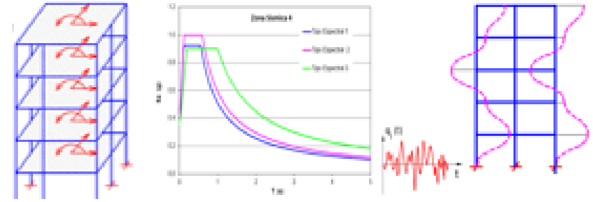
Vibración forzada sin amortiguamiento, c=0: $m\ddot{u} + ku = P(t)$

La solución, considerando que el desplazamiento y velocidad inicial son nulos, es:

$$u(t) = \frac{P_0}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)}\left(sen\ \omega t - \beta sen\ \omega_n t\right)$$

donde $\beta=\omega/\omega_n$ es la relación entre la frecuencia de la fuerza exterior y la frecuencia natural del sistema; y P_0/k representa el desplazamiento producido por la amplitud de la fuerza exterior actuando en forma estática.

Se observa que la solución es la suma de dos funciones trigonométricas seno con argumentos diferentes y que la solución presenta una indeterminación (del tipo 1/0) cuando $\beta=\omega/\omega_n$ =1, por lo cual no es válida para este caso.



Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

Vibración forzada sin amortiguamiento, c=0: $m\ddot{u} + ku = P(t)$

$$u(t) = \frac{P_0}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)} \left(sen\ \omega t - \beta sen\ \omega_n t \right)$$

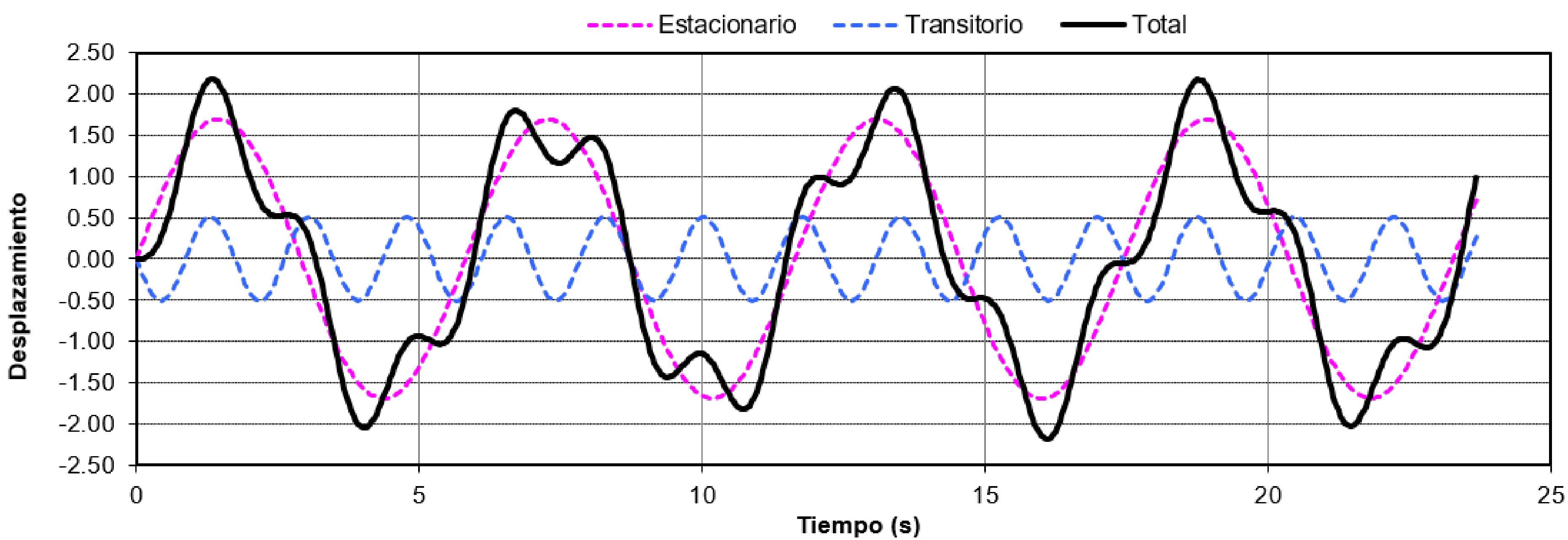
sen ωt representa el componente de la respuesta que depende de la frecuencia de la fuerza aplicada y se denomina respuesta estacionaria o permanente.

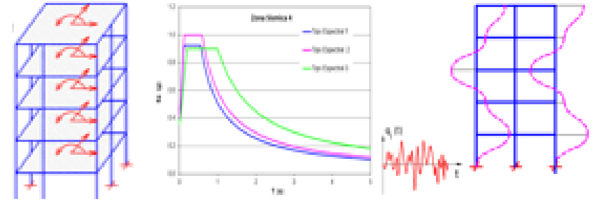
β sen *$\omega_n t$* representa la componente vinculada a la vibración libre y depende de la frecuencia natural del sistema. Se denomina respuesta transitoria porque en los sistemas amortiguados (caso real) esta respuesta se decrece en el tiempo por efecto del amortiguamiento.

Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

Vibración forzada sin amortiguamiento, c=0.

Gráficos de respuesta u(t), β = 0.3

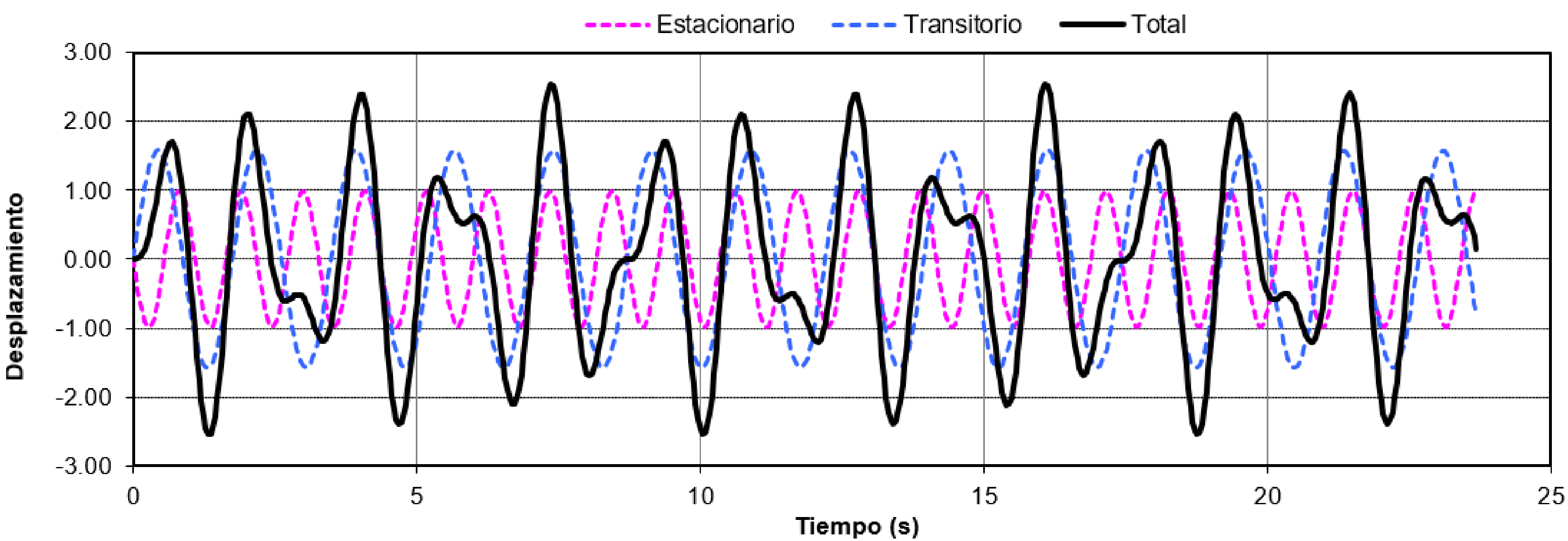




Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

Vibración forzada sin amortiguamiento, c=0.

Gráficos de respuesta u(t), $\beta = 1.6$



Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

Vibración forzada sin amortiguamiento, c=0: $m\ddot{u} + ku = P(t)$

Para cuantificar el efecto dinámico de la carga P(t) puede determinarse un factor de respuesta de desplazamiento, el que se define como la relación entre el desplazamiento dinámico máximo y el desplazamiento estático:

$$R_d = \frac{u(t)_{\max}}{P_0 / k} = \frac{1}{\left|1-\beta^2\right|}$$

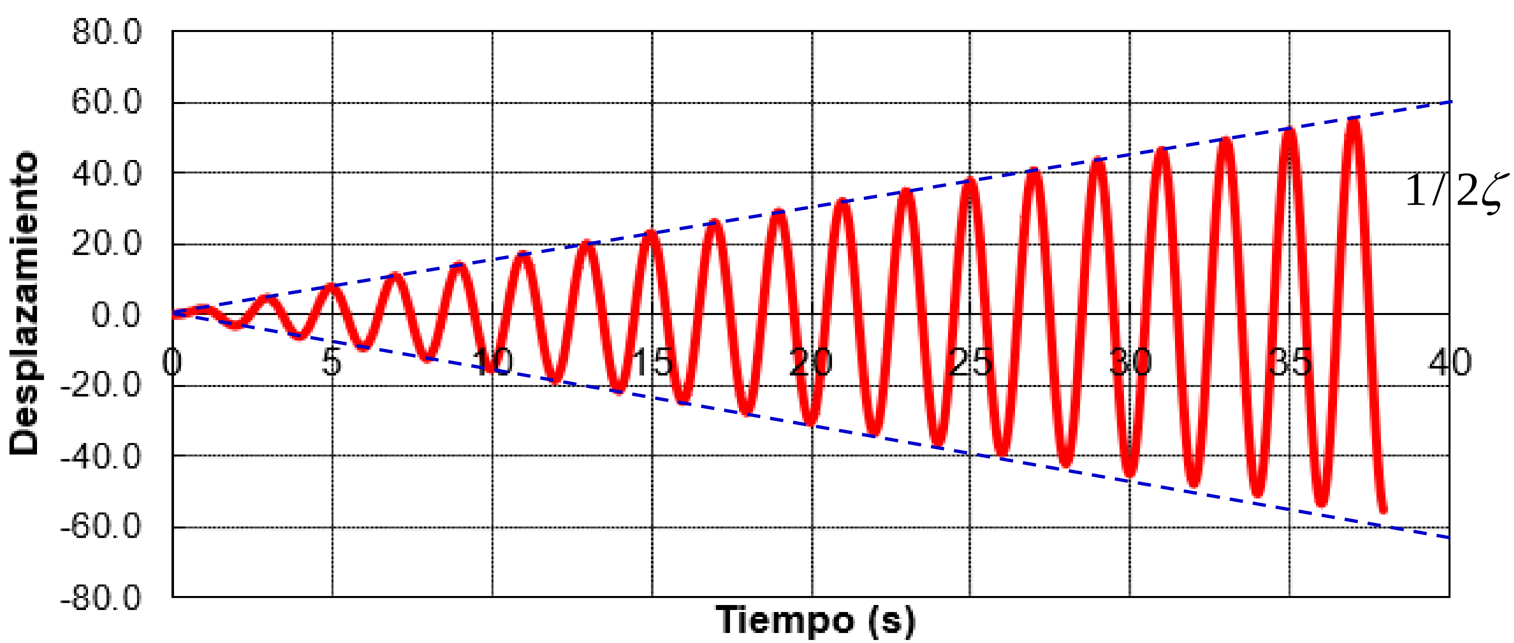
Se observa que cuando β tiende a 1 el factor R_d se aumenta significativamente, lo que implica que el desplazamiento dinámico crece por la acción de la fuerza exterior. Cuando β=1 el desplazamiento crece ilimitadamente y este fenómeno se denomina resonancia.

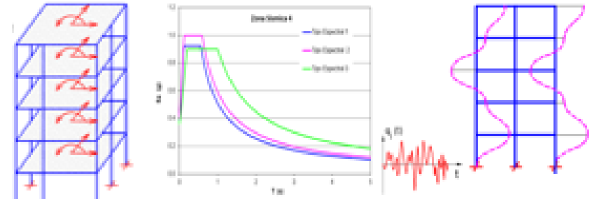
Posteriormente, veremos un gráfico del factor R_d en función de β.

Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

Vibración forzada sin amortiguamiento, c=0. Resonancia: $\beta=\omega/\omega_n=1$.

En el caso de resonancia, la solución u(t) indicada previamente no es válida y debe reformularse. Se puede demostrar que la función u(t) en este caso varía como se indica en la figura y que el desplazamiento crece ilimitadamente a medida que transcurre el tiempo. Esta conclusión es teórica, porque a partir de un cierto desplazamiento el sistema deja de ser lineal y elástico y eventualmente se produce la falla.





Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

Vibración forzada con amortiguamiento.

$$m\ddot{u} + 2\zeta\omega_n \; \dot{u} + \omega_n^2 \; u = p(t) = P_o \;\; \text{sen } \omega \text{t}$$

La solución particular de la ecuación diferencial (que representa la respuesta transitoria) es:

$$u_p(t) = e^{-\zeta\omega_n t}(A \cos \omega_D t + \; B \; sen\omega_D t)$$

La respuesta transitoria decrece rápidamente por la función exponencial que representa el efecto del amortiguamiento. Es por ello que no determinaremos las constantes A y B.

Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

Vibración forzada con amortiguamiento.

La solución complementaria de la ecuación diferencial (que representa la respuesta estacionaria o permanente) es:

$$u_c(t) = \frac{P_0}{k}\left[\frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}\right]\left[(1-\beta^2)sen\ \omega t - 2\beta\zeta\cos\ \omega t\right]$$

Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

Vibración forzada con amortiguamiento

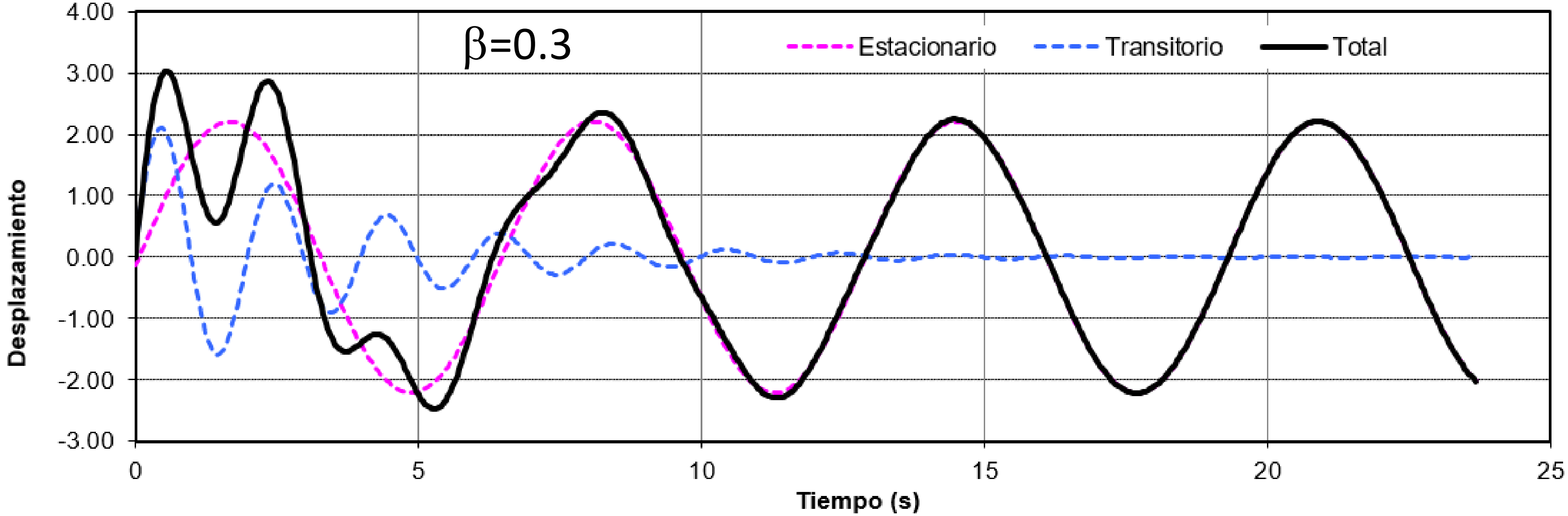
En este caso, el factor de respuesta de desplazamiento (relación entre el desplazamiento dinámico máximo y el desplazamiento estático) es:

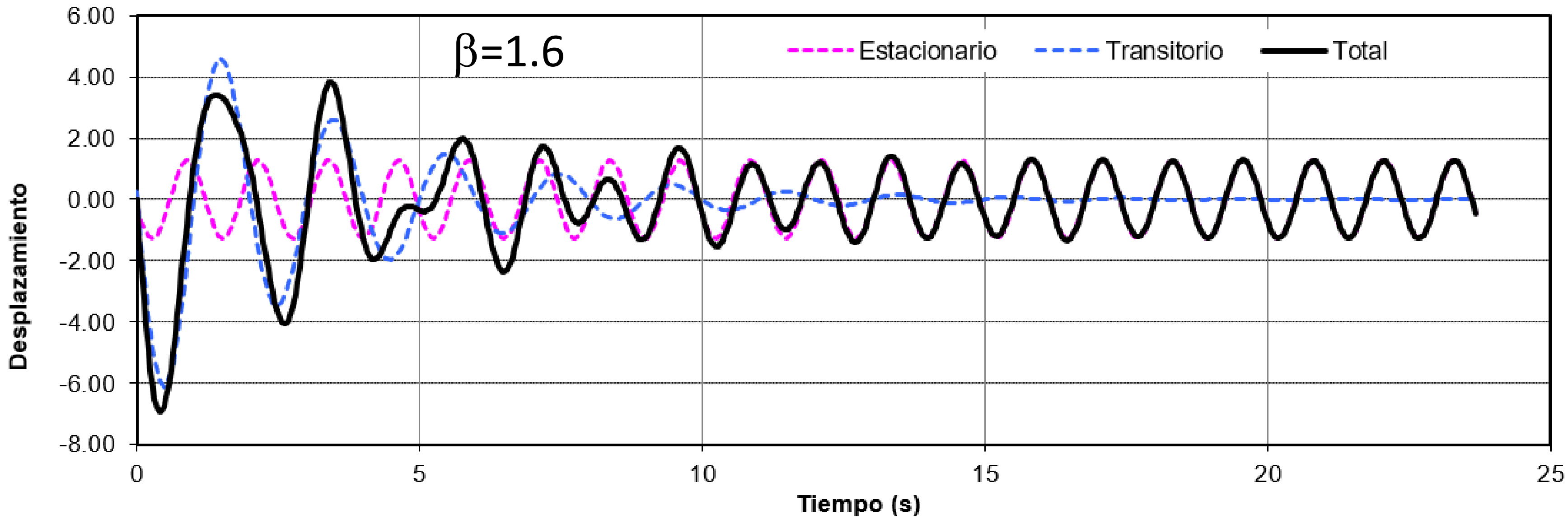
$$R_d = \frac{u(t)_{\max}}{P_0 / k} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$$

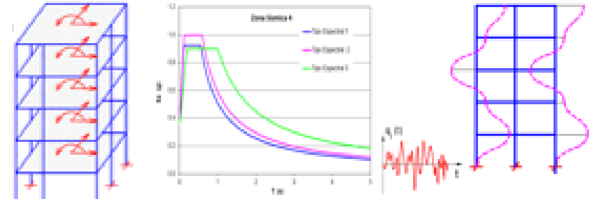
Este factor representa la amplificación del desplazamiento debido al efecto dinámico de la acción exterior.

Sistemas de 1 GDL– Vibración forzada con carga armónica, sistema amortiguado

Gráficos de respuesta:

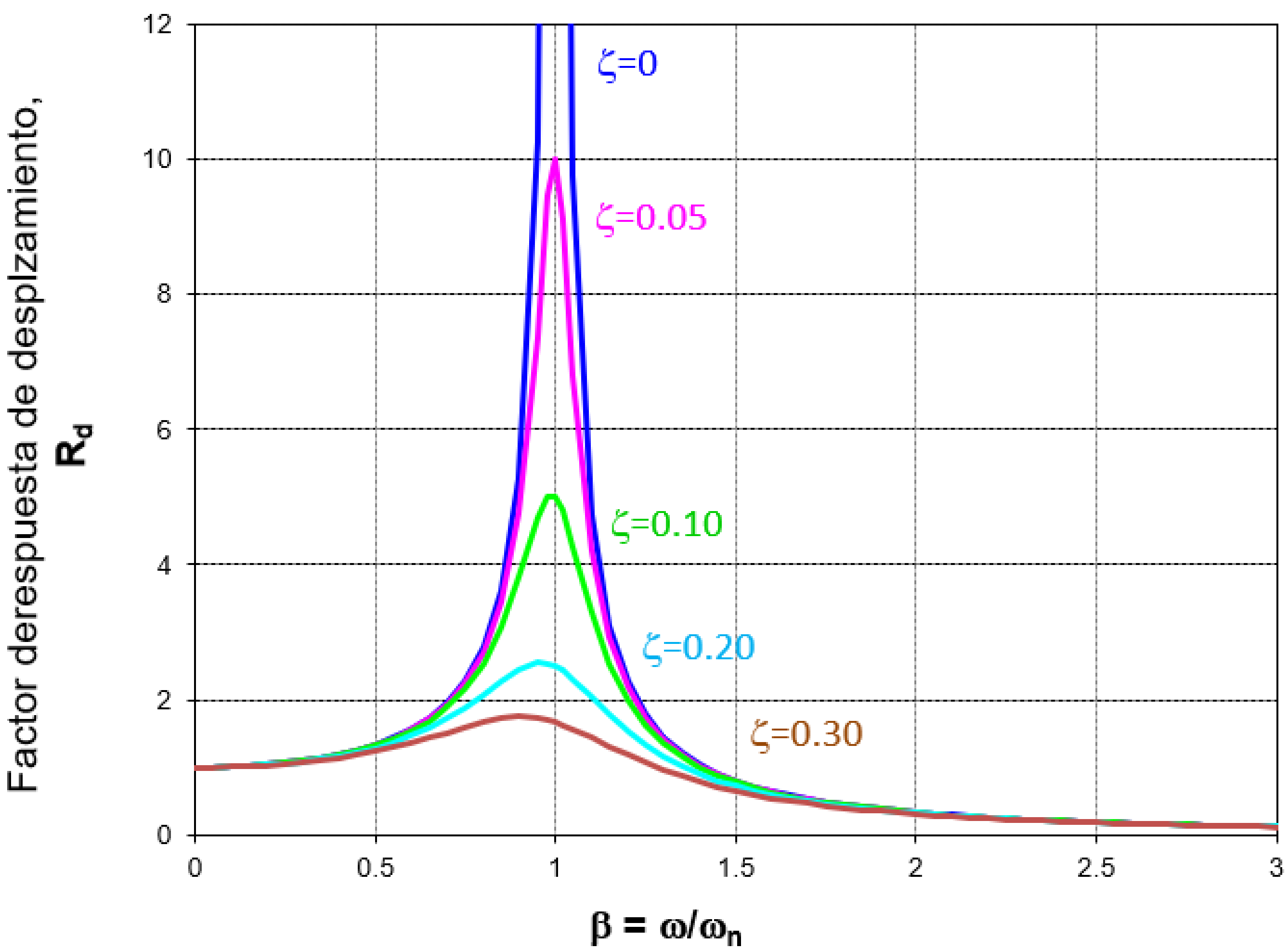






Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

Vibración forzada sin amortiguamiento.



Variación del factor en función de la relación de frecuencias $\beta=\omega/\omega_n$.

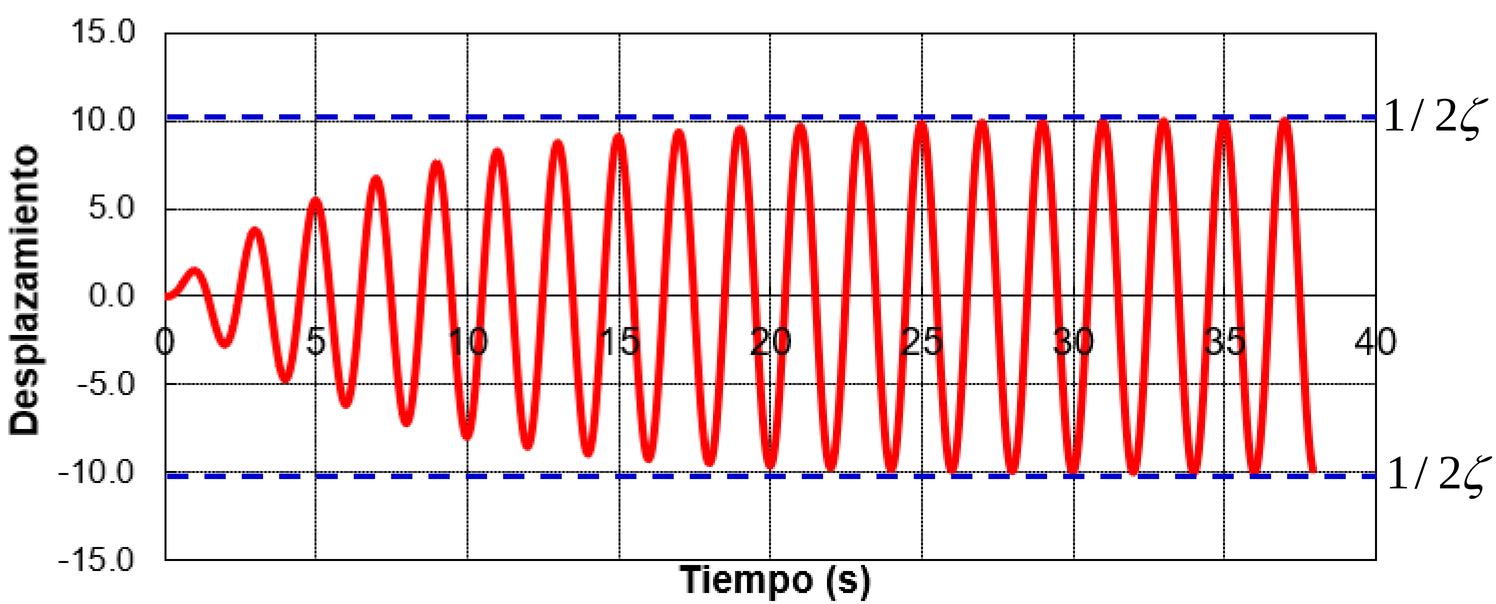
Se observa el efecto del amortiguamiento, que disminuye la amplificación dinámica a medida que aumenta ζ.

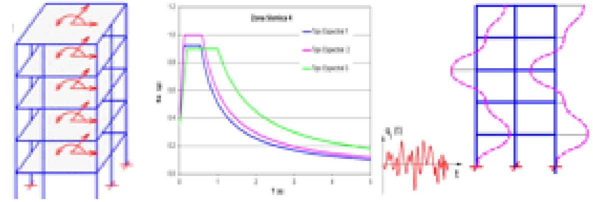
Cuando β=1 (resonancia) se produce la máxima amplificación.

Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

Vibración forzada con amortiguamiento. Resonancia: $\beta=\omega/\omega_n=1$.

Al igual que en el caso c=0, la solución previa no es válida cuando $\beta=1$, y debe reformularse. Por efecto del amortiguamiento, la respuesta en resonancia aumenta en el tiempo, pero el valor máximo del desplazamiento tiende al límite $1/2\zeta$.



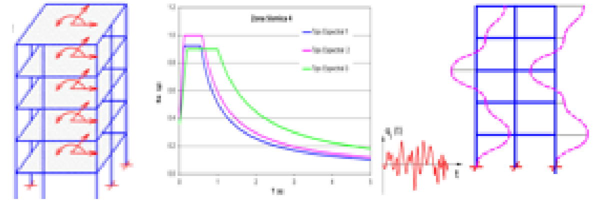


Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

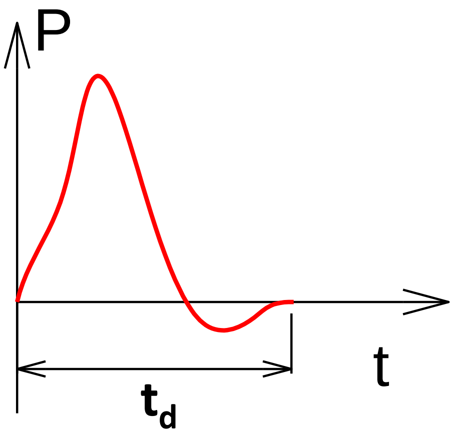
En Aula Abierta se encuentran disponibles tres **planillas de Excel** para graficar la respuesta en vibración libre y forzada con carga armónica:

- Dinamica-VL.xlsx
- Dinamica-VFA.xlsx
- Dinamica-VFA-Resonancia.xlsx

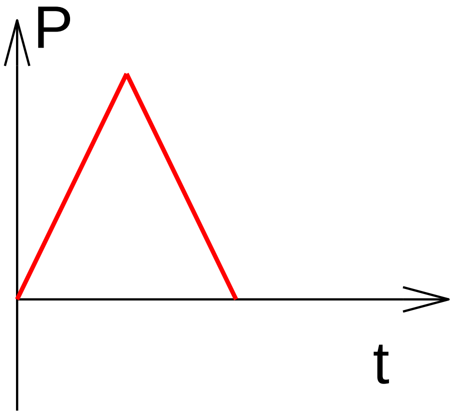
Estas planillas permites observar el efecto de distintos parámetros en la respuesta del sistema de 1 GdL.

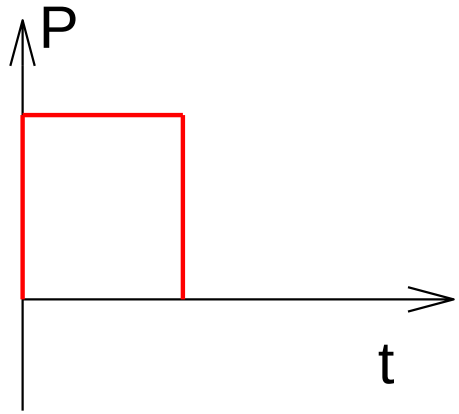


Sistemas de 1 grado de libertad dinámico. Carga impulsiva

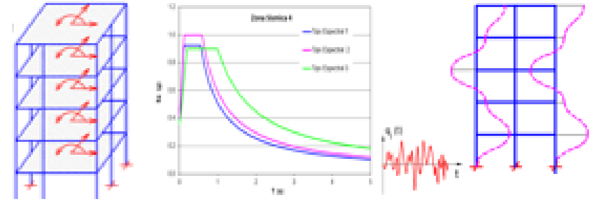


Las cargas impulsivas se caracterizan por que su tiempo de duración, t_d, es muy reducido en comparación con el periodo de la estructura T_n.
Este tipo de cargas se producen como resultado de impacto (por ejemplo, vehículos o naves sobre construcciones) o explosiones (onda de presión).





Ejemplos de pulsos simplificados de variación triangular o rectangular



Sistemas de 1 grado de libertad dinámico. Carga impulsiva

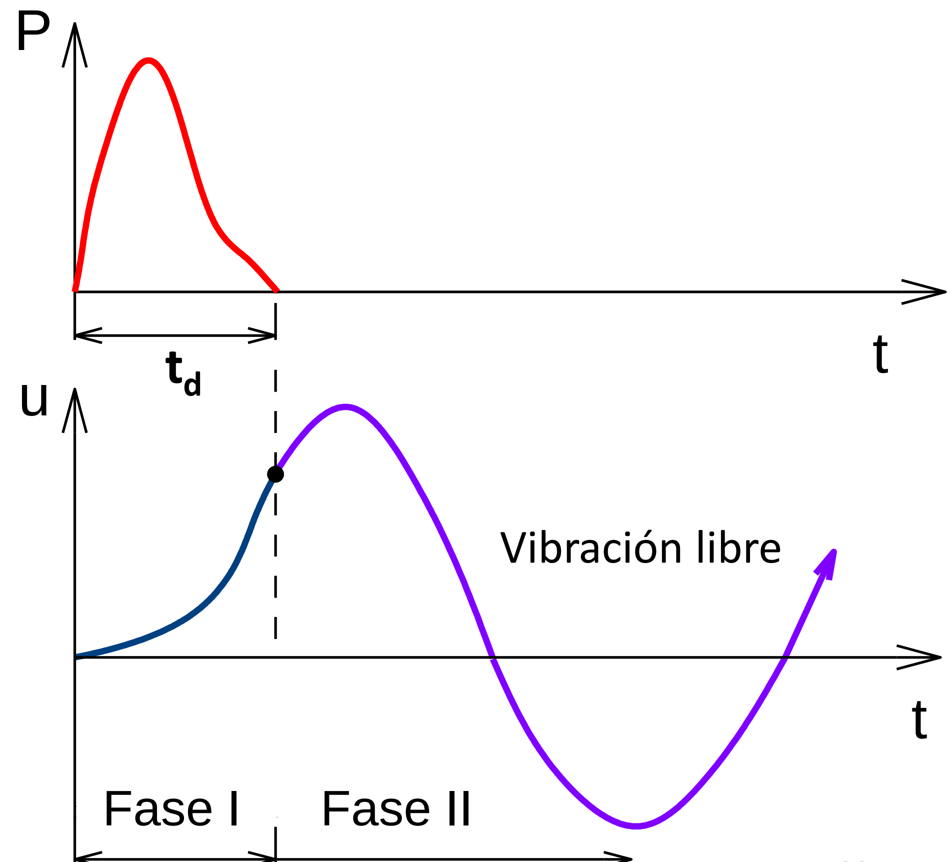
Se han desarrollado distintos procedimientos para analizar la respuesta ante cargas impulsivas. Veremos solamente una explicación conceptual de este caso.

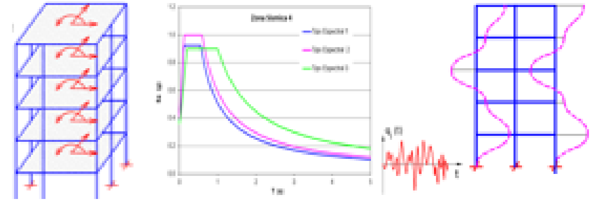
La respuesta ante carga impulsiva puede analizarse considerando dos fases:

Fase I: el impulso aplicado (energía) origina que la estructura comience a vibrar hasta que el impulso de corta duración termina en el instante t_d.

Fase II: la estructura experimenta vibración libre a partir del tiempo t_d. En ese instante, el desplazamiento y la velocidad desarrollados en Fase I, pasan a ser las condiciones iniciales para Fase II:

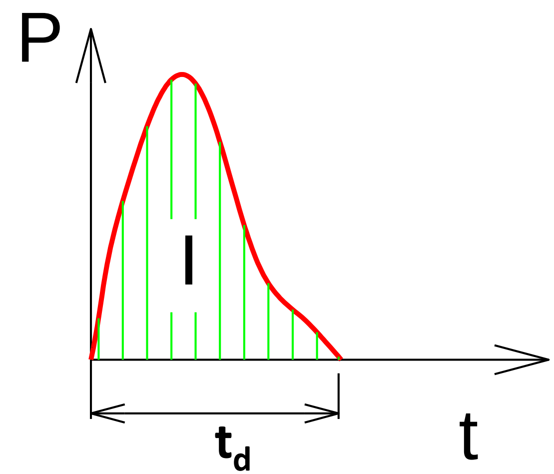
$$u(t_d) \neq 0; \quad \dot{u}(t_d) \neq 0$$





Sistemas de 1 grado de libertad dinámico. Carga impulsiva

Consideremos, como ejemplo, el caso de un pulso de variación cualquiera y de muy corta duración, $t_d << T_n$:



Fase I: consideramos vibración forzada, en condiciones iniciales de reposo y despreciamos el efecto del amortiguamiento. Considerando la igualdad entre impulso y cantidad de movimiento:

$$\int_0^{td} p(t)\, dt = m \int_0^{td} \ddot{u}\, dt \rightarrow I = m\, \Delta\dot{u}$$

$$\dot{u}(t_d) = \Delta\dot{u} = I / m$$

El desplazamiento en esta fase puede considerarse, en forma simplificada, que es nulo. La duración del impulso es tan breve que la estructura recibe una cierta cantidad de energía que se transforma en energía cinética (velocidad) pero por la inercia, no alcanza a desplazarse:

$$u(t_d) = 0$$

Sistemas de 1 grado de libertad dinámico. Carga impulsiva

Pulso de variación cualquiera y de muy corta duración, $t_d << T_n$:

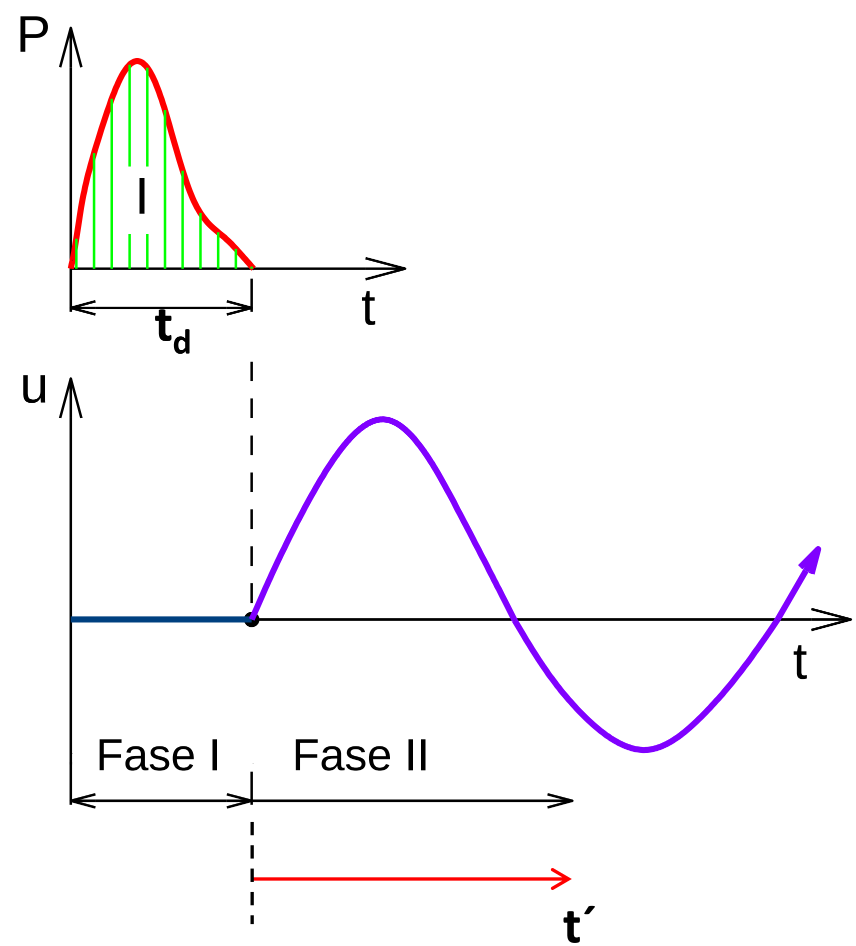
Fase II: la estructura experimenta vibración libre amortiguada a partir del tiempo t_d, con condiciones iniciales:

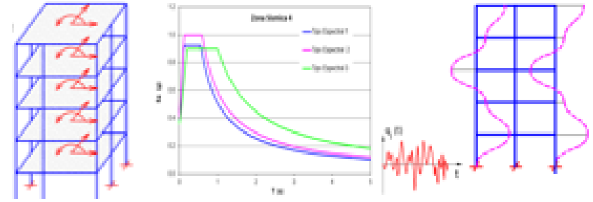
$$u(t_d) = 0; \quad \dot{u}(t_d) = I / m$$

La respuesta en esta fase está controlada por la ecuación (ver solución para vibración libre amortiguada, con u(0)=0):

$$u(t') = e^{-\zeta \omega_n t'} \left[\frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_D} \; sen \; \omega_D t' \right]$$

$$t' = t - t_d$$

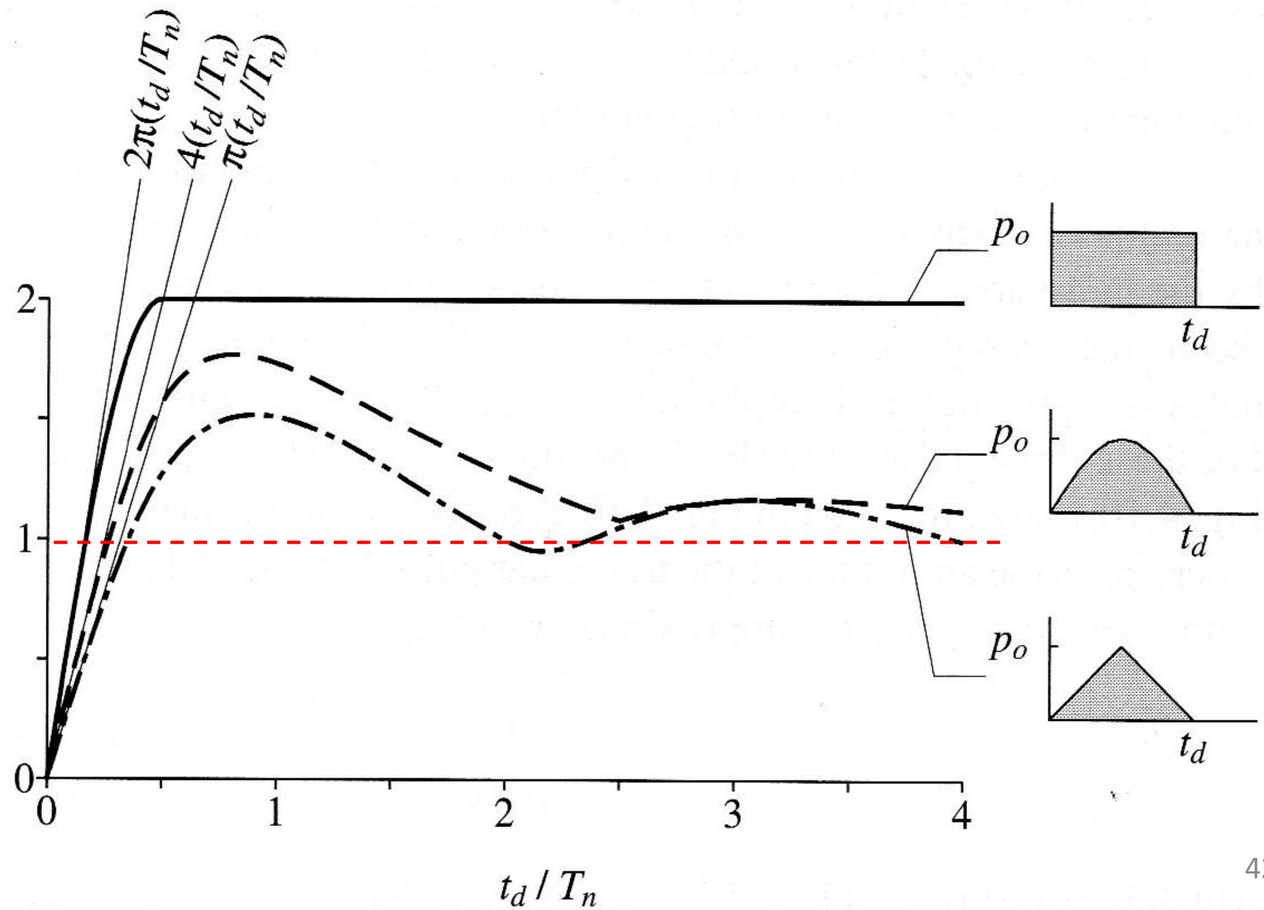


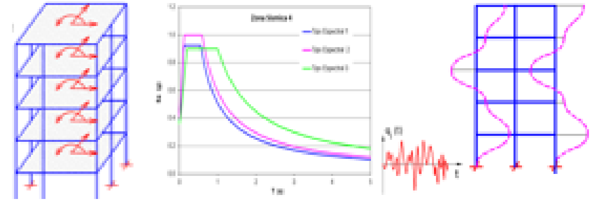


Sistemas de 1 grado de libertad dinámico. Carga impulsiva

Espectro de choque: es un gráfico donde se representa el valor del desplazamiento máximo producido por la carga impulsiva en función de la duración del impulso, t_d (ambas variables en forma relativa):

$$R_d = \frac{u(t)_{\max}}{P_0 / k}$$





Sistemas de 1 grado de libertad dinámico

Hemos descripto en esta guía de estudio la respuesta de sistemas de 1 GdL en vibración libre y para distintos casos de vibración forzada. Como complemento a los conceptos y ecuaciones presentadas se recomienda consultar el libro:

Chopra, A. *Dynamic of Structures*. Ed. Prentica Hall (disponible también en versión en español).