SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (SEL)

Introducción

Los SEL son **modelos matemáticos** muy útiles para la representación, análisis y solución de problemas *lineales* del mundo real. Se los utiliza para el análisis de redes: redes de transporte, redes de comunicación, redes económicas, entre otras; análisis de circuitos eléctricos; balanceo de reacciones químicas, etc. Se trabaja en distintos conjuntos numéricos, por ejemplo en el conjunto de los números reales, naturales, complejos, etc. dependiendo del problema.

Comenzaremos recordando algunos conceptos previos, teniendo como dominio de trabajo el conjunto de los números reales, indicado como IR.

1) Una **ecuación lineal en una incógnita *x*** o una **ecuación lineal en IR**, es una expresión de la forma

$ax = c$,

donde a y c son números reales.

Trabajando en el conjunto de los números reales, IR, esta ecuación en *x* tiene un conjunto solución que se puede representar en la recta numérica. De esta forma

$ax = c \qquad (1)$

i) Si $a \neq 0$, en (1) queda $x = \frac{c}{a}$ como única solución. El conjunto solución es

$S = \{x/\ x \in \mathrm{IR} \wedge x = \frac{c}{a}\}$

y la representación gráfica es un punto en la recta real.

ii) Si a = 0, en (1) queda $0x = c$.

- Si c = 0, $0x = 0$ y *x* toma todos los valores reales, o sea hay infinitas soluciones para *x*, el conjunto solución es S = IR.

- Si $c \neq 0$, se tiene $0x \neq 0$, que es una contradicción y, por lo tanto, no existe solución para *x*, es decir, *x* no toma ningún valor real que solucione la ecuación. En este caso el conjunto solución es vacío, se anota: S = { } o bien, $S = \phi$.

2) Una **ecuación lineal en dos incógnitas *x* e y** o, **una ecuación lineal en $\mathbf{IR^2}$**, es una expresión de la forma

$ax + by = c \qquad (2)$

donde a, b y c son números reales.

Trabajando en el conjunto producto cartesiano IR x IR = $\{(x, y)/\ x \in \mathrm{IR} \wedge y \in \mathrm{IR}\} = \mathrm{IR}^2$, cuya representación gráfica es el conocido plano cartesiano, la ecuación (2) en *x* e *y* representa una recta en IR^2.

3) Una **ecuación lineal en tres incógnitas *x, y, z*** o, **una ecuación lineal en IR^3**, es una expresión de la forma

ax + by + cz = d (3)

donde a, b, c y d son números reales.

Trabajando en el conjunto producto cartesiano

IR x IR x IR = $\{(x, y, z) / x \in IR \wedge y \in IR \wedge z \in IR\} = IR^3$

cuya representación gráfica es el conocido espacio tridimensional o de tres dimensiones y la ecuación (3) describe un plano en el espacio IR^3.

4) Así siguiendo, una **ecuación lineal en *n* incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$** o, **una ecuación lineal en IR^n**, es una expresión de la forma

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$ (4)

donde los coeficientes a_i con i = 1, 2, …, *n* y el término independiente b son números reales.

El conjunto IR^n es el producto cartesiano de *n* veces el conjunto IR por sí mismo, es decir,

IR x IR x …x IR = IR^n = $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) / x_i \in IR, i = 1, 2, \ldots, n\}$.

La representación geométrica es para *n* = 1, 2, 3. No existe representación geométrica en el caso $n \geq 4$, con $n \in IN$.

Observaciones

- Se dice que (x, y) es un *par ordenado*; (x, y, z) es una *terna ordenada* y así siguiendo, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una *n-upla ordenada* de números reales.
- El símbolo x entre los conjunto denotados por IR, se lee “producto cartesiano”.
- Cuando la ecuación en varias incógnitas o variables es *lineal*, las únicas operaciones que aparecen son sumas de productos de constantes por variables o incógnitas elevadas a la primera potencia. Por ejemplo, la expresión $2x + x^3 - 1$ no es lineal en x.
- Se debe distinguir una ecuación lineal en varias variables de una ecuación de segundo grado en una variable o en dos, etc.

Definición de sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas o variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es un conjunto finito de la forma

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + \ldots + a_{3n}\,x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m \end{cases}$$

denominada *forma o expresión escalar* del SEL, donde a_{ij} son los coeficientes reales del sistema, x_j representa a las variables o incógnitas reales y b_i son los términos independientes reales del sistema, con i = 1, 2, …, *m y* j = 1, 2, …, *n*.

La ***expresión matricial*** del SEL es

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix} \quad (1)$$

O bien, en forma abreviada se escribe

$$A \;.\; X = B,$$

donde

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{bmatrix}$ de *mxn* es la **matriz de coeficientes**, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ de *nx1* es la **matriz de incógnitas** y $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$ de *mx1* es la **matriz de los términos independientes**.

También se escriben de forma abreviadas las matrices simbolizadas con su elemento genérico; así: A = (a_{ij}), X = (x_j) y B = (b_i), donde i = 1, 2, …, *m*; j = 1, 2, …,*n*.

Se observa que aplicando primero la definición de multiplicación de matrices, AX, y luego la definición de igualdad de matrices, AX = B, la expresión (1) se convierte en la expresión escalar de un SEL y, recíprocamente.

Definiciones

a) Una **solución del sistema** expresado en forma escalar es la n-upla ordenada (s_1, s_2, …, s_n) de números reales tales que al sustituirla simultáneamente en las *m* ecuaciones del sistema: x_1 por s_1; x_2 por s_2 y así siguiendo hasta x_n por s_n, ordenadamente, se verifican las ecuaciones.

b) El conjunto de todas las soluciones del SEL se denomina **conjunto solución** y se anota, S. En símbolos:

S = {s = (s_1, s_2, …, s_n) $\in$ IR^n / A.s = B}.

Análogamente, el conjunto solución S, del SEL de *mxn*, expresado matricialmente es

S = $\left\{ s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ . \\ . \\ s_n \end{bmatrix} \in IR^{nx1} \ \wedge \ As = B \right\}$, donde s = $\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ . \\ . \\ s_n \end{bmatrix}$ de *nx1* es una matriz columna solución del sistema de *mxn.*

Nota importante

Sabiendo que las matrices columna se denominan *vectores*, se acostumbra a escribir un SEL de *mxn* con *notación vectorial*, propia de los tratamientos en espacios vectoriales, a saber:

A ***x* = *b***,

donde A es la matriz de coeficientes de *mxn* dada anteriormente, ***x*** es el vector de incógnitas o vector de variables, expresado como **x** = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ de *nx1* y, ***b*** es el vector de los términos independientes, ***b*** = $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$ de *mx1*. (Observar el uso de minúsculas para vectores.)

El espacio vectorial de matrices reales de *nx1* con escalares reales y operaciones usuales, que se suele anotar como IR^{nx1}, donde $IR^{nx1} = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, x_i \in IR, i = 1,2,...,n \right\}$ se identifica con el espacio vectorial real de las *n* – uplas ordenadas, que se suele indicar con IR^n, donde

$IR^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) / x_i \in IR, i = 1, 2, …, n\}$.

En consecuencia, es frecuente representar un SEL de *mxn* de la ***forma vectorial*** A ***x*** = ***b***.

Clasificación de sistemas lineales según la solución

a) Si el conjunto solución S no contiene ninguna solución o *no existen soluciones* para la *n* –upla $(x_1, x_2, …, x_n)$ o vector ***x*** = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$, S es el conjunto vacío y se escribe S = { } o S = ϕ. En este caso, el SEL se clasifica como ***incompatible o inconsistente.***

b) Si el conjunto S no es vacío, el SEL es **compatible.** El conjunto solución S puede tener una *única solución* para la *n*- upla $x = (x_1, x_2, …, x_n)$ o vector ***x*** = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ y el SEL se clasifica como ***compatible determinado***. Si el conjunto solución S contiene *infinitas soluciones* para la *n* – upla de las incógnitas $(x_1, x_2, …, x_n)$ o vector de incógnitas o variables, ***x*** = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$, el sistema se clasifica como ***compatible indeterminado.***

Observaciones

- Si la matriz de coeficientes A es de *mxn*, se dice que el sistema lineal dado por A.X = B o por A***x*** = ***b*** es un sistema de *mxn.*
- La palabra *sistema* se refiere a un conjunto finito con 1 o más ecuaciones.

- El número de ecuaciones, m, es menor, igual o mayor que el número de incógnitas, n.
- Si $m = n$, el SEL se denomina **cuadrado.**
- Si B = O, es decir, B es la matriz nula (todos los términos independientes del sistema son ceros), o bien, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, el SEL se denomina **homogéneo** y, por el álgebra de matrices, si AX= O (o bien $A.\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$), entonces el SEL homogéneo, admite, al menos, la solución

$$X = O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

denominada **solución trivial**. En consecuencia, **los SEL homogéneos son compatibles** (nunca incompatibles).

- Si AX = O representa un SEL homogéneo de mxn y $n > m$ (más incógnitas que ecuaciones), el SEL es compatible indeterminado.¿Porqué?

- Un ejemplo de SEL en IR^2 sin solución o incompatible o inconsistente es

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

Se observa que la primera y segunda ecuación representan la misma recta y la tercera ecuación representa una recta paralela disjunta de la anterior, por lo tanto, no hay ningún par (x, y) que verifique todas las ecuaciones, es decir no existe solución. En este caso el conjunto solución es vacío, S = { }.

- Un ejemplo de SEL en IR^2 con solución única es

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = -1 \\ 3x - 2y = 0 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Análisis de Sistemas de Ecuaciones Lineales: teorema de Rouché- Frobenius o Kronecker

Este teorema permite saber qué tipo de solución tendrá el SEL mediante el cálculo de los rangos de la matriz de coeficientes A y de la matriz ampliada A’ = A|B.

Enunciado del teorema de Rouché- Frobenius: Sea AX = B un sistema de ecuaciones lineales de *mxn* y sea A|B = A' la matriz aumentada o ampliada del sistema con los términos independientes de *mx(n+1).*

Entonces

i) si rango (A) = rango (A') = *n,* el SEL es compatible determinado (solución única);

ii) si rango (A) = rango (A') < n, el SEL es compatible indeterminado (infinitas soluciones) y el *grado de indeterminación* o *grados de libertad* del SEL es g = *n* – rango(A), g indica el número de variables libres del sistema;

iii) si rango (A) $\neq$ rango (A'), el SEL es incompatible o inconsistente (no tiene solución)

Observaciones

- Este teorema ofrece una herramienta para, sin llegar a la solución de un SEL, saber si tiene o no solución, analizando el rango de la matriz de coeficientes A y el de la matriz ampliada con los términos independientes A|B = A' del sistema.
- Si el sistema es homogéneo, representado por AX = O, se verifica que
  rango(A) = rango(A'),
  pues la matriz ampliada es A' = A|O y, los términos independientes ceros, no se modifican por operaciones elementales.
- El rango de la matriz A, rango(A), indica también el número de *variables* o *incógnitas principales* del SEL, son las variables que tienen el uno principal en la forma escalonada o escalonada reducida de A. Estas incógnitas dependen (o son función) de las restantes, llamadas *variables libres*, que toman valores arbitrarios de un determinado conjunto; el valor que se le asigna a una variable libre se denomina *parámetro.*
- El inciso iii) no es necesario colocarlo en el enunciado del teorema desde el punto de vista de la Lógica Simbólica, pues queda claro que si **no** se verifica que
  rango(A) = rango (A')
  entonces el SEL no es compatible, es decir, es incompatible o inconsistente.
- Algunos autores denotan rango de la matriz A de la forma "ρ(A)", donde ρ es la letra griega "rho".

Resolución de sistemas lineales

Un método general de resolución de sistemas lineales es el **Método de Eliminación de Gauss,** consiste en escribir la matriz ampliada, A` = A|B formada por los coeficientes más los términos independientes del SEL de *mxn* y aplicar operaciones elementales de filas a la matriz ampliada, A|B, hasta llegar a una matriz escalonada por filas. Luego, haciendo lo que se denomina *sustitución en reversa o retrosustitución*, se obtiene el conjunto solución del sistema.

El método se denomina de **Eliminación o Reducción de Gauss- Jordan** si se escalona la matriz ampliada del sistema, A' = A|B, hasta llegar a la forma escalonada *reducida* por filas de la matriz ampliada. En este caso, el conjunto solución se obtiene por simple inspección.

Ejemplo Analizar y obtener la solución de los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = -1 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$

Solución

a) Se escribe la matriz ampliada del SEL A' = A|B, siendo A la matriz de coeficientes y B la de términos independientes, o sea $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & -1 \\ 3 & -1 & 2 & | & -1 \end{bmatrix}$. Para escalonar la matriz primero se hace (-2) veces la fila 1 más la fila 2 y el resultado se coloca en la fila 2 y (-3) veces la fila 1 más la fila 3 y el resultado se coloca en la fila 3, $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 5 & -7 & | & -1 \\ 0 & 5 & -7 & | & -1 \end{bmatrix}$.

Luego se suma a la fila 3, (-1) vez la fila 2, obteniéndose $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 5 & -7 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$. Por último se multiplica la fila 2 por (1/5) y se obtiene $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & -7/5 & | & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ que es la forma escalonada de la matriz ampliada de 3x4.

Se indica que el SEL dado es equivalente al obtenido mediante la eliminación gaussiana de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ y - 7/5\, z = -1/5 \\ 3x - y + 2z = -1 \end{cases}$$

Análisis del SEL

Se observa que rango(A) = 2 (2 filas no nulas en la matriz a la izquierda de la línea vertical con rayas por tramos, A es de 3x3) y rango(A') = 2 (2 filas no nulas en la matriz ampliada, sin la separación de la línea vertical punteada, A' es de 3x4).

rango (A) = rango(A') < n = 3,

Por el teorema de Rouché – Frobenius, el SEL dado es *compatible indeterminado*, es decir, tiene infinitas soluciones.

El grado de indeterminación o grados de libertad del SEL está dado por

g = n – rango (A) = 3 – 2 = 1

Este resultado significa que el sistema tiene 1 ***variable libre*** que tomará valores arbitrarios de un conjunto, en este caso, IR y tiene dos ***variables principales o pivotales*** que son las que tienen 1 en la forma escalonada; aquí son x e y. En otras palabras, x e y quedarán en función de la variable libre z.

El SEL obtenido, expresado en forma escalar, observando la última forma escalonada encontrada es:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 & (1) \\ y - 7/5\, z = -1/5 & (2) \end{cases}$$

que es equivalente al dado, es decir, tiene la misma solución (la ventaja es que se ha reducido).

En el primer miembro se dejan las incógnitas o variables principales y se despejan de abajo hacia arriba; por lo tanto, de (2) se despeja la incógnita y, queda: y = -1/5 + 7/5 z   (3)

Haciendo sustitución en reversa, se remplaza (3) e (1):

x = 2 (-1/5 + 7/5 z) – 3z;

x = -2/5 + 1/5 z

Si la variable libre z toma valores reales arbitrarios t, o sea, z = t, se obtiene el conjunto solución

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -2/5 + 1/5t \\ -1/5 + 7/5t \\ t \end{bmatrix} \in IR^3 \right\} \qquad (4)$$

que es la respuesta solicitada en el ejemplo.

Se observa que dándole valores arbitrarios a t se obtienen las infinitas soluciones. Por ejemplo, si t = 0, se obtiene la solución particular s = $\begin{bmatrix} -2/5 \\ -1/5 \\ 0 \end{bmatrix} \in$ S.

Nota: si se remplaza la solución general en el SEL original se deben verificar las ecuaciones; en particular, si se remplaza la solución específica anterior en el SEL dado, se verifican las ecuaciones. Para cada valor de t se obtiene una solución particular distinta.

Observación: El conjunto S dado en (4) NO ES SUBESPACIO VECTORIAL DE IR^3. ¿Por qué?

Teorema Sean AX = B y CX = D dos sistemas lineales de *mxn*. Si las matrices ampliadas [A|B] y [C|D] de estos sistemas son equivalentes por filas, ambos sistemas lineales tienen exactamente las mismas soluciones.

Actividad Argumentar y/o demostrar el teorema anterior.

Ejemplo Determinar las soluciones positivas del SEL en IR^4 dado por

$$\begin{cases} x \quad + 2z \quad - w = 7 \\ \quad z \quad + \quad 2w = 3 \end{cases}$$

Solución

Si se trabaja en IR^4, existen 4 incógnitas que son *x*, *y*, *z* y *w* (observar que "*y*" no "se ve" en el SEL; puede denominarse de cualquier forma).

La matriz ampliada es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, está en forma escalonada, por lo tanto se obtiene la solución según el método de eliminación gaussiana. Para que la matriz ampliada se transforme en escalonada reducida, se puede hacer cero el elemento de la fila 1, columna 3, $a_{13} = 2$, mediante la operación elemental, (-2) veces la fila 2 más la fila 1 y el resultado en la fila 1, se obtiene la forma escalonada reducida por filas: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ del método de eliminación de Gauss – Jordan, que permite por simple inspección obtener la solución.

El SEL equivalente al original mirando la matriz ampliada anterior es

$$\begin{cases} x \quad - w = 1 \\ \quad z + 2w = 3 \end{cases}$$

Análisis del sistema: rango(A) = rango(A') = 2 < *n* = 4, por lo tanto el SEL es compatible indeterminado con grado de libertad g = *n* – rango (A) = 4 - 2 = 2. Existen 2 variable libres: *y*, *w* y dos variables principales o pivotales (tienen los 1 principales en la forma escalonada reducida) que son: *x* y *z.*

Las variables libres toman valores arbitrarios positivos, por ejemplo, $y = t \in IR^+ \wedge w = r \in IR^+$.

Despejando las incógnitas principales *x* y *z* de la primera y segunda ecuación del sistema reducido, se obtiene

$x = 1 + w$

$z = 3 – 2w$

Como se solicitan las *soluciones positivas*, debe ser: $x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0 \wedge w > 0$.

Los grados de libertad son y = $t > 0$ y w = $r > 0$, entonces $x = 1 + r > 0 \wedge z = 3 - 2r > 0 \wedge r > 0$. Luego $r > -1 \wedge r < 3/2 \wedge r > 0$, entonces $0 < r < 3/2$.

Respuesta: S = {(1 + r, t, 3 – 2 r, r), t > 0 $\wedge$ 0 < r < 3/2} o bien

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1+r \\ t \\ 3-2r \\ r \end{bmatrix}, t > 0 \wedge 0 < r < \frac{3}{2} \right\}$$ es el conjunto de soluciones positivas del SEL dado.

NOTA: Carl Friedich Gauss (1777-1855) ha sido uno de los matemáticos más famosos del mundo y Wilhelm Jordan (1842 – 1899) fue un geodesista alemán.

Sistemas Cuadrados

Teorema: Si A es una matriz *inversible* o *no singular*, el sistema lineal dado por AX = B es compatible determinado de solución única $X = A^{-1}. B$ y, recíprocamente.

Demostración

A . X = B

Por hipótesis, A es inversible. Multiplicando a ambos miembros a la izquierda por A^{-1},

$A^{-1} (A . X) = A^{-1} B$

Aplicando propiedad asociativa de la multiplicación de matrices

$(A^{-1} A) . X = A^{-1} B$

Por definición de matrices inversibles

$I X = A^{-1} B$

La matriz identidad es el elemento neutro en el producto de matrices, entonces

$X = A^{-1} B$

Como la matriz inversa A^{-1} es única, **X es la única solución del sistema lineal y el sistema es compatible determinado**.

Caso particular: SEL cuadrado *homogéneo* representado por A X = O. En este caso, $X = A^{-1}. O$, luego **X = O es la única solución, llamada solución trivial**.

Actividad ¿Qué valor/es deben tomar los escalares reales k y l para que el sistema representado por AX = O, siendo A = $\begin{bmatrix} 1 & k \\ l & -2 \end{bmatrix}$ sea compatible indeterminado?

¿Y si A = (k + l) O, con O matriz nula de *nxn*?

Ejemplo Sean las proposiciones *p*: "A es una matriz de *nxn*" y *q*: "AX = B es un sistema compatible determinado". Escribir una implicación verdadera e indicar la condición suficiente del enunciado.

Solución

La proposición *p* se refiere a una matriz A cualquiera (genérica) de tamaño *nxn.*

La proposición *q* se refiere a un sistema compatible determinado (con solución única) cualquiera de *mxn.*

Análisis de las implicaciones

i) La proposición $p \Rightarrow q$ es **falsa**, pues existe A = O (matriz nula) de 2x2 y el sistema OX = B **no es compatible determinado.** Si B fuera la matriz nula, el SEL sería compatible indeterminado y si B fuera distinta de la matriz nula, el SEL sería incompatible.

Se observa que el contraejemplo dado verifica p $\wedge$ **-** q que equivale a la negación de la implicación $p \Rightarrow q$. Recordar que se dan contraejemplos para *justificar* que una proposición es falsa.

ii) La proposición $q \Rightarrow p$ es **falsa,** pues existe el sistema expresado matricialmente de la forma $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ compatible determinado de solución S $= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in IR^2 \right\}$ (conjunto unitario, tiene una única solución que es el par (0, 0)) y A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no es cuadrada.

Respuesta: Si una matriz A es cuadrada nada se puede asegurar respecto de la solución del sistema con matriz de coeficientes A.

Teorema o Regla de Cramer

Sea AX = B un SEL de *nxn* tal que det(A) $\neq 0$ entonces X = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ está dada por

$x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}$, $x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)}$, …., $x_j = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$, …, $x_n = \dfrac{\det(An)}{\det(A)}$

donde $\det(A_j) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ .. & .. & \ldots & .. & \ldots & \ldots \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ que tiene la j-ésima columna de la matriz de coeficientes A remplazada por los términos independientes b_i, i = 1, 2, …, n.

(Si det(A) = 0 y $\det(A_j) = 0$, el sistema puede ser compatible indeterminado o incompatible y si det(A) = 0 y $\det(A_j) \neq 0$, el SEL es incompatible.)

Actividad Inventar un sistema de 4x4 que cumpla la hipótesis del Teorema de Cramer y hallar la solución utilizando dicha regla. Verifique la solución.

Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Teorema importante: El conjunto solución de un sistema lineal homogéneo A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{0}$ de *mxn* es un subespacio del espacio real IR^n (con las operaciones ordinarias definidas en dichos espacios vectoriales reales).

Demostración

Se recuerda el teorema de las condiciones necesarias y suficientes de subespacios que se utilizará para la presente demostración.

> *Condiciones necesarias y suficientes de subespacio*: Sea *V* un espacio vectorial sobre un cuerpo de escalares *K* con dos operaciones, definidas como *suma,"+",* y *producto por escalares*, "**.**" El conjunto *S*, no vacío e incluído en *V*, es un subespacio de *V* si, y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes expresadas en símbolos:
>
> a) $(\forall u \wedge v \in V) : (u \wedge v \in S \Rightarrow u + v \in S) \wedge$
>
> b) $(\forall k \in K) (\forall u \in V): (u \in S \Rightarrow k\, u \in S)$
>
> (Conocidas como cierre para la suma y cierre para el producto por escalares.)

Sea S = $\{x \in IR^n \,/\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ el conjunto solución del sistema homogéneo A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{0}$ de *mxn*. Se utilizarán las condiciones necesarias y suficientes de subespacio para probar que S es subespacio real del espacio IR^n, con las operaciones ordinarias definidas en dichos espacios vectoriales reales.

- S está incuído en $V = IR^n$, por definición de S.
- S es un conjunto no vacío, pues la solución $x = \boldsymbol{0} \in IR^n$ verifica que A$\boldsymbol{x}$ = $\boldsymbol{0}$.

- Cualesquiera sean dos soluciones s_1 y s_2 de S, verifican que:

A s_1 = ***0***

A s_2 = ***0***

Sumando miembro a miembro en el espacio vectorial IR^n, se tiene que

A $(s_1 + s_2)$ = ***0***

Entonces $(s_1 + s_2)$ es una solución y, por lo tanto $(s_1 + s_2) \in$ S. Se verifica el cierre para la suma.

- Cualesquiera sean el escalar k y la solución $s \in$ S,

A s = ***0***

k (As) = k ***0***

A (ks) = ***0***

Entonces (ks) es una solución y, por lo tanto, (ks) $\in$ S. Se verifica el cierre para la multiplicación por escalares.

Luego, se ha demostrado que el conjunto solución, S, de un SEL homogéneo, A***x*** = ***0***, es un subespacio de IR^n y, S recibe el nombre de **espacio solución**.

Actividad Hallar una base y la dimensión del espacio solución del sistema lineal determinado por las matrices de coeficientes: a) A = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$; b) M = O de 3x4; c) H inversible de 5x5; d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Actividad ¿Podría imaginarse cómo muestran las infinitas soluciones de los sistemas compatibles indeterminados los soft computacionales? ¿Podría responderlo, justificando cuándo termine el curso?

Teorema de equivalencias lógicas

Si A es una matriz de orden *n*, las siguientes proposiciones son lógicamente equivalentes:

a) A es no singular o inversible.

b) La forma escalonada reducida de A es la identidad.

c) La matriz A es equivalente por filas a I.

d) La matriz A se puede escribir como producto de matrices inversibles.

e) El rango de A es *n*.

f) El determinante de A es distinto de cero.

g) AX = B es un SEL compatible determinado para cada matriz B de *nx1*, con solución única $X = A^{-1} B$.

h) AX = O es un SEL compatible determinado con solución única X = O (solución trivial).

i) A tiene *n* vectores filas linealmente independientes.

j) A tiene *n* vectores columna linealmente independientes.

k) Las *n* filas de A generan el espacio vectorial IR^n con las operaciones usuales.

l) Las *n* columnas de A generan el espacio vectorial IR^n con las operaciones usuales.

m) Las *n* filas de A forman una base de IR^n.

n) Las *n* columnas de A forman una base de IR^n.

o) Las dimensiones de los *espacios fila* (espacio vectorial generado por las filas de A) y *espacio columna* (espacio vectorial generado por las columnas de A) son iguales a *n*.

Observación: También se dice que el rango de una matriz A de *mxn* es el *número de vectores fila linealmente independientes de A*. Esta consideración se realiza trabajando en el *espacio fila de A* que es un subespacio de IR^n generado por los *m* vectores fila de A que tienen *n* componentes cada uno.

Análogamente, se dice que el rango de una matriz A de *mxn* es el *número de vectores columna linealmente independientes de A*, consideración realizada en el *espacio columna de A* que es un subespacio de IR^m generado por los *n* vectores columna de A que tienen *m* componentes cada uno.

Una matriz de *mxn* tiene el mismo número de vectores filas que de vectores columnas linealmente independiente (se observan en la forma escalonada reducida de la matriz), este número es el rango de la matriz.